[高等量子理论专题系列讲座]

近代量子理论中的几个数学专题

提纲

[第一讲] 无穷乘积计算和算符行列式计算

[第二讲] 泛函、泛函变分与泛函导数计算，泛函(路径)积分定义

[第三讲] 泛函(路径)积分的数学分析

[第四讲] 二阶变系数线性微分方程求解

[第五讲] 逆算符、*Green* 函数方法与 *Lippmann-Schwinger* 方程求解

[第六讲] 简论量子理论中的算符

[第七讲] *Grassmann* 的数学分析

※ ※ ※ ※

[量子系列专题讲座]

[第 2 讲]

泛函、泛函变分与泛函导数计算，泛函(路径)积分定义

提 纲

一，泛函数的概念与定义

二， 泛函变分与泛函导数

三， 泛函导数的性质与计算

四，经典场论与泛函 *Poisson* 括号

五、泛函 *Taylor* 展开

六，泛函 （路径） 积分定义

※ ※ ※

数学量之间的一般关系称作“映射（*Map*）”。区分为 **4** 大类 ：

“数→数”的映射 $\Rightarrow$ 函数;

“函数→数”的映射 $\Rightarrow$ 泛函数;

“函数→函数”的映射 $\Rightarrow$ 算符;

“算符→算符”的映射 $\Rightarrow$ 超算符。

本讲叙述其中第二条：泛函数及其相关的问题。

一，泛函数的概念与定义

泛函数简称作泛函，是将一类函数集合中的每一个函数映射到某个实(复)数集合中的某个数。每一种映射方式就称作一个泛函数。这时，作为泛函因变量的是实(复)数值，自变量则是（某一类）函数。

泛函数 F 对函数 $\varphi(\bar{x})$ 的依赖关系用方括号表示 $F[\varphi(\bar{x})]$。泛函 $F[\varphi(\bar{x})]$ 特征是它不仅和函数 $\varphi(\bar{x})$ 在任一特定点值有关，更重要地是依赖于 $\varphi(\bar{x})$ 在整个定义域的值，即依赖于 $\varphi(\bar{x})$ 的整个形状。因此，作为泛函数 $F[\varphi(\bar{x})]$ 自变量的函数 $\varphi(\bar{x})$ 中的自变数 $\bar{x}$ 其实只是个傀标，于是常有记号变动 $F[\varphi(\bar{x})]=F[\varphi(\bar{y})]=F[\varphi]$，比如，对给定积分核 $K(\bar{x})$，

$$F[\varphi(\bar{x})]\equiv\int_a^b K(\bar{x})\varphi(\bar{x})d\bar{x}=\int_a^b K(\bar{y})\varphi(\bar{y})d\bar{y}\equiv F[\varphi(\bar{y})]\equiv F[\varphi]$$

泛函数的概念广泛存在于自然界。比如，定积分是被积函数的泛函数；旅游费用是旅游路线的泛函数；系统的作用量是系统场量(及其导数)的泛函数，

$$S[\varphi(x)]=\int \mathcal{L}(\varphi(x),\nabla\varphi(x),\dot{\varphi}(x))d^4x\ ;$$

向给定态 $\langle A|$ 的投影概率幅就是状态波函数 $\varphi(\bar{x})$ 的泛函数，

$$F_A[\varphi(\bar{x})]=\langle A|\varphi(\bar{x})\rangle\ ;$$

还比如，某个给定空间点的电势是电荷空间分布的泛函数，

$$\Delta V\left(\vec{x}\right)=-4\pi\rho\left(\vec{x}\right)\ \rightarrow\ V\left(\vec{x}_0\right)=V_{\vec{x}_0}\left[\rho\left(\vec{x}\right)\right]=\frac{-4\pi}{\Delta}\rho\left(\vec{x}\right)\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$$

特殊情况，$\delta(x-y)$也可以看作（线性）泛函数：对于固定的y值，它将任意给定的（一类）函数$\psi(x)$（线性地）映射到数值$\psi(y)\equiv\psi_y$，

$$\psi_y\equiv\int\delta(x-y)\psi(x)dx\ :\ \psi(x)\rightarrow\psi_y$$

二，泛函变分与泛函导数

1，泛函变分与泛函导数定义

[泛函变分定义] 令函数$\varphi(\vec{x})$有一无穷小变分$\varphi(\vec{x})\rightarrow\varphi'(\vec{x})=\varphi(\vec{x})+\delta\varphi(\vec{x})$，由此所导致的泛函$F\left[\varphi'(\vec{x})\right]=F\left[\varphi(\vec{x})+\delta\varphi(\vec{x})\right]$变化称作泛函$F\left[\varphi(\vec{x})\right]$的变分，记作

$$\delta F=F\left[\varphi'(\vec{x})\right]-F\left[\varphi(\vec{x})\right]=F\left[\varphi(\vec{x})+\delta\varphi(\vec{x})\right]-F\left[\varphi(\vec{x})\right]\qquad(2.1)$$

令函数$\varphi(\vec{x})$在点$\vec{y}$处有一无穷小变分$\delta\varphi(\vec{x})=\varepsilon\delta\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$，它导致的泛函$F\left[\varphi(\vec{x})\right]$的变化率称作$F\left[\varphi(\vec{x})\right]$在点$\vec{y}$处的泛函导数$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{y})}$。即有

[泛函导数定义] 泛函$F\left[\varphi(\vec{x})\right]$在某一点$\vec{y}$处的泛函导数为[1]：

$$\boxed{\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{y})}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F\left[\varphi(\vec{x})+\varepsilon\delta(\vec{x}-\vec{y})\right]-F\left[\varphi(\vec{x})\right]}{\varepsilon}}\qquad(2.2)$$

注意，这里特殊变分中所含无穷小量ε的真正意图是：**在展开分子泛函$F\left[\varphi(\vec{x})+\varepsilon\delta(\vec{x}-\vec{y})\right]$时，只需计及含$\varepsilon$的一阶项，可以略去含$\varepsilon$二阶及以上的项。于是，展开式一阶项所含$\varepsilon$和分母的$\varepsilon$相消。**只要注意展开式只取到一阶项，也可以略写$\varepsilon$，直接令$\delta\varphi(\vec{x})=\delta(\vec{x}-\vec{y})$，定义中也

[1] 杨炳麟，量子场论导引(下册)，北京：科学出版社，1988。第64页。

不要除以ε并取极限。显然，$\dfrac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}$度量泛函数$F[\varphi(\bar{x})]$对点$\bar{y}$处$\varphi(\bar{x})$数值变化的敏感程度。

如若将$\varphi(\bar{x})$看成电荷的空间密度，则$\delta\varphi(\bar{x})=\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{x}')$是某瞬间在点$\bar{x}_0$处产生的大小为$\varepsilon$的电荷。如果量$F$是$\varphi(\bar{x})$的泛函（可以是某类的位势、场强度），则$\dfrac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{x}_0)}$表征：由于点$\bar{x}_0$处出现单位电荷引起的$F$的变化。

接着，令函数$\varphi(\bar{x})$有一小变分$\delta\varphi(\bar{x})=\varphi'(\bar{x})-\varphi(\bar{x})$，则泛函$F$的总变分$\delta F\equiv F[\varphi']-F[\varphi]$等于各点变分$\dfrac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}\delta\varphi(\bar{y})$之和。这导致下面泛函变分和泛函导数之间的关联，

[泛函导数与泛函变分关联定义] 泛函数$F[\varphi(\bar{x})]$的变分$\delta F[\varphi(\bar{x})]$由各点处泛函导数$\dfrac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}$和相应变分$\delta\varphi(\bar{y})$的乘积积分所决定：

$$\boxed{\begin{cases}\delta F\equiv F[\varphi+\delta\varphi]-F[\varphi]=\displaystyle\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y}\\ F[\varphi+\delta\varphi]=F[\varphi]+\displaystyle\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y}\end{cases}}\qquad(2.3)$$

其实，这也可以看作是泛函导数的由泛函变分表示的另一个定义。

（2.2）式和（2.3）式的等价关联是明显的。设定泛函变分（2.3）式对任意参考点$\bar{y}$有特殊变分$\delta\varphi(\bar{y})=\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{y})$，即可得到该点$\bar{y}$的泛函导数（2.2）式。同时，也可以由（2.2）式也能导出（2.3）式。从（2.2）式左边出发，乘以$\delta\varphi(\bar{y})$，对$\bar{y}$积分可得

$$\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y}=\int\frac{F[\varphi(\bar{x})+\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{y})]-F[\varphi(\bar{x})]}{\varepsilon}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y}$$

其实，此式右边就是（2.3）式的左边。因为有

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{F[\varphi(\vec{x})+\varepsilon\delta(\vec{x}-\vec{y})]-F[\varphi(\vec{x})]}{\varepsilon}\delta\varphi(\vec{y})d\vec{y} \\
&=\int \frac{1}{\varepsilon}\left\{F[\varphi(\vec{x})]+\int \frac{\delta F[\varphi(\vec{x})]}{\delta\varphi(\vec{x})}\varepsilon\delta(\vec{x}-\vec{y})d\vec{x}-F[\varphi(\vec{x})]\right\}\delta\varphi(\vec{y})d\vec{y} \\
&=\int\left\{\int \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}\delta(\vec{x}-\vec{y})d\vec{x}\right\}\delta\varphi(\vec{y})d\vec{y}=\int \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{y})}\delta\varphi(\vec{y})d\vec{y} \\
&\equiv F[\varphi+\delta\varphi]-F[\varphi]\equiv\delta F
\end{aligned}
$$

证毕。

还可以如下看待泛函导数：设 ***Lagrangian*** $L(t)=L[\varphi(\vec{x},t),\dot{\varphi}(\vec{x},t)]$，有：

$$\delta L(t)=\int\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right)d\vec{x} \qquad (2.4a)$$

另一方面，如用分立记号（$\varphi_i(t)\equiv\varphi(\vec{x}_i,t)$）则有[2]：

$$\delta L(\varphi,\dot{\varphi})=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\dot{\varphi}_i\right)=\sum_i\left(\frac{1}{\delta V_i}\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{1}{\delta V_i}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\dot{\varphi}_i\right)\delta V_i \qquad (2.4b)$$

显然(2.4a)式是(2.4b)式的连续极限，注意不同点变分互相独立，即得：

$$\boxed{\frac{\delta L}{\delta\varphi(\vec{x},t)}=\lim_{\delta V_i\to 0}\frac{1}{\delta V_i}\frac{\partial L(t)}{\partial\varphi_i(t)},\qquad \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}(\vec{x},t)}=\lim_{\delta V_i\to 0}\frac{1}{\delta V_i}\frac{\partial L(t)}{\partial\dot{\varphi}_i(t)}} \qquad (2.5)$$

这里需要除以 δV_i，因为泛函导数在乘以 $\delta\varphi$ 后还要乘以 $d\vec{x}$ 作积分，才

得到变分 δL。其中 $\vec{x}$ 位于第 i 个小盒中。由(2.5)式得知，实质上，

泛函导数 $\frac{\delta L}{\delta\varphi(\vec{x},t)}$ 正比于在点 $(\vec{x},t)$ 处 $L(t)$ 对函数 $\varphi(\vec{x}t)$ 的偏导数。

这个含意在下面(2.9)—(2.15)式中有更清楚更多样地表现。

三，泛函导数的性质与计算

1、泛函导数满足通常的微分性质：

---

[2] *D.*卢里，粒子与场，北京：科学出版社，**1981** 年。第 **61** 页。

i. $\dfrac{\delta a}{\delta\varphi(\vec{x})}=0$

ii. $\boxed{\dfrac{\delta\{aF[\varphi]+bG[\varphi]\}}{\delta\varphi(\vec{x})}=a\dfrac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}+b\dfrac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}}$

iii. $\boxed{\dfrac{\delta\{F[\varphi]G[\varphi]\}}{\delta\varphi(\vec{x})}=\dfrac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}G[\varphi]+F[\varphi]\dfrac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}}$ **(2.6)**

证明 iii：按定义，一方面

$$\delta\{F[\varphi]G[\varphi]\}=F[\varphi+\delta\varphi]G[\varphi+\delta\varphi]-F[\varphi]G[\varphi]=\int\frac{\delta\{F[\varphi]G[\varphi]\}}{\delta\varphi(\vec{x})}\delta\varphi(\vec{x})d\vec{x}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}&F[\varphi+\delta\varphi]G[\varphi+\delta\varphi]-F[\varphi]G[\varphi]\\&=\left(\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}\delta\varphi d\vec{x}+F[\varphi]\right)\left(\int\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}\delta\varphi d\vec{x}+G[\varphi]\right)-F[\varphi]G[\varphi]\\&\cong\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}\delta\varphi d\vec{x}\cdot G[\varphi]+F[\varphi]\cdot\int\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}\delta\varphi d\vec{x}\end{aligned}$$

结合起来，有

$$\int\frac{\delta\{F[\varphi]G[\varphi]\}}{\delta\varphi}\delta\varphi d\vec{x}=\int\left[\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}G[\varphi]+F[\varphi]\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}\right]\delta\varphi d\vec{x}$$

由于变分 $\delta\varphi$ 的任意性，故得，

$$\frac{\delta\{F[\varphi]G[\varphi]\}}{\delta\varphi(\vec{x})}=\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}G[\varphi]+F[\varphi]\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}$$

iv. 复合泛函的泛函导数

$$\boxed{\frac{\delta F[\eta[\varphi]]}{\delta\varphi(x)}=\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\eta(x')}\frac{\delta\eta(x')}{\delta\varphi(x)}dx'} \quad \textbf{(2.7)}$$

证明 iv：$\displaystyle\int\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)}\delta\varphi(x)dx=\int\frac{\delta F}{\delta\eta(x')}\delta\eta(x')dx'=\iint\frac{\delta F}{\delta\eta(x')}\frac{\delta\eta(x')}{\delta\varphi(x)}\delta\varphi(x)dxdx'$

$$\Rightarrow\quad\frac{\delta F[\eta[\varphi]]}{\delta\varphi(x)}=\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\eta(x')}\frac{\delta\eta(x')}{\delta\varphi(x)}dx'$$

这里，泛函变分$\delta\eta(x')$的含义是：当$\varphi(x)$改变$\delta(x-x')$时$\eta[\varphi]$的改变。

v，按泛函导数定义，有如下关系：

$$\boxed{\frac{\delta\varphi_\sigma(x)}{\delta\varphi_\rho(x')}=\delta_{\sigma\rho}\delta(x-x')\ ;\quad \frac{\delta\partial_\mu\varphi_\sigma(x)}{\delta\varphi_\rho(x')}=\delta_{\sigma\rho}\partial_\mu\delta(x-x')} \qquad (2.8)$$

证明：$\varphi_\sigma(x)=\sum_\rho\int\delta_{\sigma\rho}\varphi_\rho(x'')\delta(x''-x)d^4x''$，若固定$x$，此式就是函数$\varphi_\sigma(x'')$的积分泛函，按泛函导数定义得：

$$\frac{\delta\varphi_\sigma(x)}{\delta\varphi_\rho(x')}=\int\delta_{\sigma\rho}\delta(x''-x')\delta(x''-x)d^4x''=\delta_{\sigma\rho}\delta(x'-x)$$

类似，泛函$\partial_\mu\varphi_\sigma(x)=\sum_\rho\int\delta_{\sigma\rho}\partial''_\mu\varphi_\rho(x'')\delta(x''-x)d^4x''$，令$\varphi_\rho(x'')=\delta(x''-x')$，即得其泛函导数的该式。

2，泛函变分与泛函导数计算（I）

i，$G[\varphi(x)]=\int g(\varphi(x))dx$，则泛函导数[3]

$$\frac{\delta G[\varphi(x)]}{\delta\varphi}=\int\{g(\varphi(x')+\delta(x'-x))-g(\varphi(x'))\}dx'=\int\frac{\partial g}{\partial\varphi}(x)\delta(x'-x)dx'=\frac{\partial g}{\partial\varphi}(x)$$

$$\boxed{G[\varphi(x)]=\int g(\varphi(x))dx\ \Rightarrow\ \frac{\delta G[\varphi(x)]}{\delta\varphi}=\frac{\partial g}{\partial\varphi}(x)} \qquad (2.9)$$

ii，若泛函$G[\varphi(x)]=\int g(\nabla\varphi(x))dx$，则有

$$\boxed{G[\varphi(x)]=\int g(\nabla\varphi(x))dx\ \Rightarrow\ \frac{\delta G}{\delta\varphi}(x)=-\nabla\frac{\partial g}{\partial\nabla\varphi}(x)} \qquad (2.10)$$

iii，若泛函$G[\varphi(x)]=G(\varphi(x))$，则，

$$\frac{\delta G(x)}{\delta\varphi(x')}=\frac{\delta}{\delta\varphi(x')}\int G(\varphi(x''))\delta(x-x'')dx''$$

$$=\int\{G(\varphi(x'')+\varepsilon\delta(x''-x'))-G(\varphi(x''))\}\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-x'')dx''$$

[3] 下面各公式的具体应用见上面卢里书，第 92 页。

$$=\int \frac{\partial\{G(\varphi(x''))\}}{\partial\varphi(x'')}\delta(x''-x')\delta(x-x'')dx''=\frac{\partial G}{\partial\varphi}(x)\delta(x-x')$$

$$\boxed{G[\varphi(x)]=G(\varphi(x)) \Rightarrow \frac{\delta G(x)}{\delta\varphi(x')}=\frac{\partial G}{\partial\varphi}(x)\delta(x-x')} \qquad \textbf{(2.11)}$$

iv，若泛函 $G[\varphi(x)]=G(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x))\equiv G(x)$，则

$$\frac{\delta G(x)}{\delta\varphi(x')}=\frac{\delta}{\delta\varphi(x')}\int G(x'')\delta(x-x'')dx''=$$

$$=\int\left\{G\left(\varphi(x'')+\varepsilon\delta(x''-x'),\partial''\left(\varphi(x'')+\varepsilon\delta(x''-x')\right)\right)-G\left(\varphi(x''),\partial''_\mu\varphi(x'')\right)\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-x'')dx''$$

$$=\frac{\partial G}{\partial\varphi}(x)\delta(x-x')+\frac{\partial G}{\partial\partial_\mu\varphi}(x)\left(\partial_\mu\delta(x-x')\right)$$

于是，总前所述，可得如下两个一般公式：

$$\boxed{G[\varphi(x)]=\int g(\varphi,\partial_\mu\varphi)dx \Rightarrow \frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}=\frac{\partial g}{\partial\varphi}(x)-\partial_\mu\frac{\partial g}{\partial\partial_\mu\varphi}(x)} \qquad \textbf{(2.12)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}G[\varphi(x)]=G(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x))\equiv G(x) \Rightarrow \\ \dfrac{\delta G(x)}{\delta\varphi(x')}=\dfrac{\partial G}{\partial\varphi}(x)\delta(x-x')+\dfrac{\partial G}{\partial\partial_\mu\varphi}(x)\partial_\mu\delta(x-x')\end{array}} \qquad \textbf{(2.13)}$$

注意，对第二种情况，即函数结构情况，可以有如下计算：

$$A(x)\partial_\mu\delta(x-x')=\int A(x'')\delta(x-x'')\left(\partial''_\mu\delta(x''-x')\right)dx''=$$

$$=A(x'')\delta(x-x'')\delta(x''-x')\Big|_{x''=-\infty}^{x''=+\infty}-\int\delta(x''-x')\partial''_\mu\left(A(x'')\delta(x-x'')\right)dx''$$

$$=-\int\delta(x''-x')\partial''_\mu\left(A(x'')\delta(x-x'')\right)dx''=-\partial'_\mu\left(A(x')\delta(x-x')\right)$$

如果换个角度理解上面结果，就必须假定可以作如下计算：

$$\partial'_\mu\left(A(x')\delta(x-x')\right)\equiv\partial'_\mu\left(A(x)\delta(x-x')\right)=A(x)\partial'_\mu\delta(x-x')=-A(x)\partial_\mu\delta(x-x')$$

换句话说，**涉及 δ 函数求导计算时，为了全部计算自洽，需要设定：**

$$\boxed{\begin{cases}\delta(x-y)=\delta(y-x)\,,\ \partial_\mu^{(x)}\delta(x-y)=-\partial_\mu^{(y)}\delta(x-y)\\ \partial_\mu^{(x)}\left(A(x)\delta(x-y)\right)\equiv A(y)\left(\partial_\mu^{(x)}\delta(x-y)\right)\end{cases}} \qquad \textbf{(2.14)}$$

就是说，**除了 δ 函数是偶性，一阶导数是奇性这两条之外，与 $\delta(x-y)$**

相乘的函数 $A(x)$，对乘积求导时不能出现对 $A(x)$ 的偏导数。数学上这等于提示，**左边与 $\delta(x-y)$ 相乘的 $A(x)$ 已经没有邻域可用于对它求导数**。

3，泛函导数与泛函变分计算（II）

若设泛函形式为 $F[\varphi(\vec{x})]=\int f(\varphi(\vec{x}),\nabla\varphi(\vec{x}))d\vec{x}$，直接算出泛函导数与泛函变分如下：

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{y})}=\frac{1}{\varepsilon}\int\left\{f\left(\varphi(\vec{x})+\varepsilon\delta(\vec{x}-\vec{y}),\nabla\varphi(\vec{x})+\nabla\varepsilon\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)-f\left(\varphi(\vec{x}),\nabla\varphi(\vec{x})\right)\right\}d\vec{x}$$
$$=\int\left\{\frac{\partial f}{\partial\varphi(\vec{x})}\delta(\vec{x}-\vec{y})+\frac{\partial f}{\partial(\nabla\varphi(\vec{x}))}\cdot(\nabla\delta(\vec{x}-\vec{y}))\right\}d\vec{x}$$
$$=\int\left\{\frac{\partial f}{\partial\varphi(\vec{x})}\delta(\vec{x}-\vec{y})+\nabla\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial(\nabla\varphi(\vec{x}))}\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)-\left(\nabla\cdot\frac{\partial f}{\partial(\nabla\varphi(\vec{x}))}\right)\delta(\vec{x}-\vec{y})\right\}d\vec{x}$$

于是有

$$\boxed{F[\varphi(\vec{x})]=\int f(\varphi(\vec{x}),\nabla\varphi(\vec{x}))d\vec{x}\ \Rightarrow\ \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}=\left\{\frac{\partial f}{\partial\varphi}-\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial(\nabla\varphi)}\right)\right\}(\vec{x})}\quad\textbf{(2.15)}$$

这就是此泛函数在 $\vec{x}$ 点的泛函导数。

例如 $\vec{P}(t)=-\int\sum_{\sigma}\pi_{\sigma}\nabla\varphi_{\sigma}d^3x$，有：

$$\boxed{\frac{\delta\vec{P}(t)}{\delta\pi_{\sigma}(\vec{x},t)}=-\nabla\varphi_{\sigma}(\vec{x},t),\ \frac{\delta\vec{P}(t)}{\delta\varphi_{\sigma}(\vec{x},t)}=-\nabla\pi_{\sigma}(\vec{x},t)}\quad\textbf{(2.16)}$$

4、泛函导数举例（III）

计算泛函 $\lambda[\varphi]=\dfrac{\int\varphi*H\varphi dv}{\int\varphi*\varphi dv}$ 的泛函导数。设 $\varphi(\vec{x})=\varphi_1(\vec{x})+i\varphi_2(\vec{x})$ 为复标量场，先令虚部不变，求实部变分在 $\vec{x}_0$ 的泛函导数。则有

$$\left.\frac{\delta\lambda[\varphi]}{\delta\varphi_1(\bar{x}_0)}\right|_{\varphi_2=const}=\frac{\delta\lambda[\varphi]}{\varepsilon}=\frac{\int\varphi*(H-\lambda)\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{x}_0)dv+\int\left[\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{x}_0)\right]^*(H-\lambda)\varphi dv}{\varepsilon\int\varphi*\varphi dv}$$

$$=\frac{\left\{\left[(H-\lambda)\varphi\right]^*+(H-\lambda)\varphi\right\}_{\bar{x}=\bar{x}_0}}{\int\varphi*\varphi dv}$$

类似地，若求虚部变分 $i\delta\varphi_2=i\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{x}_0)$ 在 $\bar{x}_0$ 的泛函导数。得

$$\left.\frac{\delta\lambda[\varphi]}{\delta\varphi_2(\bar{x}_0)}\right|_{\varphi_1=const}=\frac{i\left\{\left[(H-\lambda)\varphi\right]^*-(H-\lambda)\varphi\right\}_{\bar{x}=\bar{x}_0}}{\int\varphi*\varphi dv} \qquad (2.17)$$

四，经典场论与泛函 *Poisson* 括号 [4]

1，[泛函 *Poisson* 括号定义] 若泛函 F,G 只通过 φ,π 依赖 t（即不明显依赖于 t），则泛函 ***Poisson*** 括号定义如下：

$$\boxed{\{F,G\}_{P.B}=\int\left(\frac{\delta F}{\delta\varphi(\bar{x},t)}\frac{\delta G}{\delta\pi(\bar{x},t)}-\frac{\delta F}{\delta\pi(\bar{x},t)}\frac{\delta G}{\delta\varphi(\bar{x},t)}\right)d\bar{x}} \qquad (2.18a)$$

其中，$\frac{\delta F}{\delta\varphi}$ 等是 F 对 φ 的泛函导数（在 $(\bar{x},t)$ 处）。对多个独立场 $\Omega=\Omega\left[\varphi_\sigma,\pi_\sigma\right]$, $\Gamma=\Gamma\left[\varphi_\sigma,\pi_\sigma\right]$，且泛函不明显依赖 t，泛函 ***Poisson*** 括号定义推广如下：

$$\boxed{\{\Omega,\Gamma\}_{P.B}=\sum_{\sigma=1}^{N}\int\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varphi_\sigma(\bar{x},t)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\pi_\sigma(\bar{x},t)}-\frac{\delta\Omega}{\delta\pi_\sigma(\bar{x},t)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_\sigma(\bar{x},t)}\right)d\bar{x}} \qquad (2.18b)$$

泛函 ***Poisson*** 括号定义（**2.18**）和普通 ***Poisson*** 括号（无穷多自由度）实质是相同的。

2，经典场的 ***Lagrange*** 框架 [5]

用 ***Lagrangian*** 的泛函导数 $\delta L/\delta\varphi_\sigma,\delta L/\delta\dot{\varphi}_\sigma$ [6] 表述经典场运动方

[4] **D.**卢里，粒子与场，北京：科学出版社, **1981** 年。第 **72--74** 页。
[5] 也见 ***D.M.Gitman, et.al.,***，《***Quantization of Fields with Constraints***》, ***Springer-Verlag,* 1990, §2.7**。

程。这时 $L(t)=\int \mathcal{L}(x)d^3x$，按泛函导数定义有

$$\delta L=\int\left\{\frac{\delta L}{\delta\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}_\sigma}\delta\dot{\varphi}_\sigma\right\}d^3x \qquad (2.19)$$

另一方面，可以实际计算此泛函变分，

$$\begin{aligned}\delta L&=\int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma(\vec{x},t)}\delta\varphi_\sigma(\vec{x},t)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma(\vec{x},t)\right)}\delta\left(\partial_\mu\varphi_\sigma(\vec{x},t)\right)\right\}d^3x\\&=\int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i\varphi_\sigma\right)}\delta\varphi_\sigma\right)-\left(\partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i\varphi_\sigma\right)}\right)\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\delta\dot{\varphi}_\sigma\right\}d^3x\\&=\int\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma}-\left(\partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi_\sigma)}\right)\right)\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\delta\dot{\varphi}_\sigma\right\}d^3x\end{aligned}$$

两者相比较，即得

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{\delta L(t)}{\delta\varphi_\sigma(\vec{x},t)}=\dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},t)}{\partial\varphi_\sigma(\vec{x},t)}-\partial_i\dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},t)}{\partial\left(\partial_i\varphi_\sigma(\vec{x},t)\right)}\\[2ex]\dfrac{\delta L(t)}{\delta\dot{\varphi}_\sigma(\vec{x},t)}=\dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},t)}{\partial\dot{\varphi}_\sigma(\vec{x},t)}\end{cases}} \qquad (2.20)$$

上面计算可推广到作用量泛函 $S[\varphi]$ 的 4 维积分协变形式 $S[\varphi]=\int\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)dx$，按 ***Hamilton*** 变分原理 $\delta S[\varphi_\alpha]=0$，求得 ***Euler-Lagrange*** 方程为 [7]

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},t)}{\partial\varphi_\sigma(\vec{x},t)}-\partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},t)}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma(\vec{x},t))}\right)=0,\ (\alpha=1,2,\cdots n)} \qquad (2.21)$$

3，经典场的 ***Hamilton*** 框架，正则方程

设 ***Lagrangian*** 密度 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\varphi_\sigma,\partial_\mu\varphi_\sigma)=\mathcal{L}(\varphi_\sigma,\partial_i\varphi_\sigma,\dot{\varphi}_\sigma)$。接着，引入新变数 $\pi_\sigma\equiv\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}$。如果能够反解出 $\dot{\varphi}_\sigma$ [8]，则可引入（替代旧变数—广义速度场 $\dot{\varphi}_\sigma$ 的）新变数—共轭动量场 π_σ，此过程称作 ***Legendre* 变换**。

---

[6]本来是相对论 4 维协变形式，出现非协变的泛函导数是由于 ***Hamiltonian*** 为非协变的形式。不但对 t 的积分为有限(t_1,t_2)，而且更主要的是 $L(t)$ 只对空间而非 4 维不变积分。

[7] 见张永德，高等量子力学（上），北京：科学出版社。2010 年。第 94—95 页。

[8] 注意，不一定能够反解出来。只当变换行列式 ***Hessian*** 不为零才可以。见上注下册 P. 360。

于是有 $\mathcal{L}=\mathcal{L}\left[\varphi_\sigma,\partial_i\varphi_\sigma,\dot\varphi_\sigma(\varphi_\rho,\partial_j\varphi_\rho,\pi_\rho)\right]$，而 ***Hamiltonian*** 密度 $\mathcal{H}$ 则为，

$$\mathcal{H}=\sum_\sigma \pi_\sigma\dot\varphi_\sigma-\mathcal{L}=\mathcal{H}\left[\varphi_\sigma,\partial_i\varphi_\sigma,\pi_\sigma\right] \qquad \textbf{(2.22)}$$

由于其中 $\dot\varphi_\sigma$ 已被 π_σ 所替代，故

$$\begin{aligned}\delta H=\delta\int\mathcal{H}d\bar{x}=\int\Bigg\{&\sum_{\sigma\rho}(\dot\varphi_\sigma\delta\pi_\sigma+\pi_\sigma\frac{\partial\dot\varphi_\sigma}{\partial\varphi_\rho}\delta\varphi_\rho+\pi_\sigma\frac{\partial\dot\varphi_\sigma}{\partial(\partial_i\varphi_\rho)}\delta(\partial_i\varphi_\rho)+\pi_\sigma\frac{\partial\dot\varphi_\sigma}{\partial\pi_\rho}\delta\pi_\rho-\\ &-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi_\sigma)}\delta(\partial_i\varphi_\sigma)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi_\sigma}\frac{\partial\dot\varphi_\sigma}{\partial\varphi_\rho}\delta\varphi_\sigma-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi_\sigma}\frac{\partial\dot\varphi_\sigma}{\partial(\partial_i\varphi_\rho)}\delta(\partial_i\varphi_\rho)-\\ &-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi_\sigma}\frac{\partial\dot\varphi_\sigma}{\partial\pi_\rho}\delta\pi_\rho\Bigg)\Bigg\}d\bar{x}\\ =&\int\left\{\sum_\sigma\left(\dot\varphi_\sigma\delta\pi_\sigma-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi_\sigma)}\delta(\partial_i\varphi_\sigma)\right)\right\}d\bar{x}\\ =&\int\sum_\sigma\left\{\dot\varphi_\sigma\delta\pi_\sigma-\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma}-\partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi_\sigma)}\right)\right]\delta\varphi_\sigma\right\}d\bar{x}\end{aligned}$$

但另一方面，根据泛函导数定义，有：

$$\delta H=\sum_\sigma\int\left(\frac{\delta H}{\delta\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\delta H}{\delta\pi_\sigma}\delta\pi_\sigma\right)d\bar{x}$$

由以上两方面的对比可得[9]（$\delta\varphi_\sigma,\delta\pi_\sigma$ 任意）

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{\delta H}{\delta\varphi_\sigma}=-\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma}+\partial_i\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i\varphi_\sigma\right)}\right)\\ \dfrac{\delta H}{\delta\pi_\sigma}=\dot\varphi_\sigma\end{cases}} \qquad \textbf{(2.23a)}$$

根据场的 ***Euler-Lagrange*** 方程得知，第一式右边乃是 $-\dot\pi_\sigma$。于是最后得到：

$$\boxed{\dot\varphi_\sigma=\frac{\delta H}{\delta\pi_\sigma},\ \dot\pi_\sigma=-\frac{\delta H}{\delta\varphi_\sigma}} \qquad \textbf{(2.23b)}$$

---

[9] 这时，$\dfrac{d\Omega}{dt}$ 应理解为 $\dfrac{\partial\varphi_\sigma}{\partial t}$ 和 $\dfrac{\partial\pi_\sigma}{\partial t}$ **!**因为 $\bar{x}$ 不移动的,它们是自由度的编号,与 t 无关，t 不通过 $\bar{x}$ 影响 φ_σ **!**

这就是场方程的 ***Hamiltonian*** 形式。于是，由给定的 ***Lagrangian*** 密度$\mathscr{L}$，可得 ***Hamiltonian*** 密度$\mathscr{H}$，对空间积分即得 ***Hamiltonian***，代入（**2.23b**）式得场方程。这就是 ***Hamilton*** 框架（如 ***Lagrange*** 框架，则直接由 ***Lagrangian*** 密度，按 ***Euler-Lagrange*** 方程得到场方程）。注意，由于 H 是 $(\varphi_\sigma,\pi_\sigma)$ 的泛函，这里的正则方程是泛函导数。

这时，若有一物理量 [10]：

$$\Omega=\int\omega\,(\varphi_\sigma,\pi_\sigma,t)d\vec{x}$$

则 $\Omega=\Omega\left[\varphi_\sigma,\pi_\sigma;t\right]$[11]。于是对 t 作变分 δt，得：

$$\frac{d\Omega\left[\varphi_\sigma,\pi_\sigma;t\right]}{dt}\delta t=\frac{\partial\Omega}{\partial t}\delta t+\sum_\sigma\int\left(\frac{\delta\,\Omega}{\delta\varphi_\sigma}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial t}+\frac{\delta\,\Omega}{\delta\pi_\sigma}\frac{\partial\pi_\sigma}{\partial t}\right)d\vec{x}\delta t$$

$$\frac{d\Omega\left[\varphi_\sigma,\pi_\sigma;t\right]}{dt}\delta t=\frac{\partial\Omega}{\partial t}\delta t+\sum_\sigma\int\left(\frac{\delta\,\Omega}{\delta\varphi_\sigma}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial t}+\frac{\delta\,\Omega}{\delta\pi_\sigma}\frac{\partial\pi_\sigma}{\partial t}\right)\delta t d\vec{x}\ \Rightarrow$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\int\sum_\sigma\left(\frac{\delta\,\Omega}{\delta\varphi_\sigma}\frac{\delta H}{\delta\pi_\sigma}-\frac{\delta\,\Omega}{\delta\pi_\sigma}\frac{\delta H}{\delta\varphi_\sigma}\right)d\vec{x}\qquad\text{（2.24a）}$$

于是力学量 Ω 的动力学方程为

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt}==\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\left\{\Omega,H\right\}_{(\varphi_\sigma,\pi_\sigma)}}^{12}\qquad\text{（2.24b）}$$

这里 $\dfrac{\delta H}{\delta\pi_\sigma},\dfrac{\delta H}{\delta\varphi_\sigma}$ 的具体含义见上页。

4，将（**2.24**）式中力学量 Ω 代以 $F=\varphi_\sigma$ 或 π_σ，并由（**2.24**）式出发同样得出所有结果。由于

---

[10] 若将 Ω 看成 $\varphi_\sigma,\pi_\sigma$，则写成积分泛函形式时，不显含 t（在 $(\varphi_\sigma,\pi_\sigma)$ 中），而得：

$$\dot{\varphi}_\sigma=\left\{\varphi_\sigma,H\right\},\ \dot{\pi}_\sigma=\left\{\pi_\sigma,H\right\}。$$

[11] Ω 是 φ,π 的泛函，是 t 的普通函数！

[12] 这里的 $\dfrac{\partial\Omega}{\partial t}$ 与 $\dfrac{d\Omega}{dt}$ 的差别不像经典（$\vec{x}=\vec{x}(t)$），只表明 Ω 显含 t 与否！

$$\varphi_\sigma(\vec{x},t)=\int\sum_\rho \delta_{\sigma\rho}\varphi_\rho(\vec{x}',t)\delta(\vec{x}-\vec{x}')d\vec{x}'$$

根据泛函导数定义，有：

$$\frac{\delta\varphi_\sigma(\vec{x},t)}{\delta\varphi_\rho(\vec{x}'',t)}=\int\delta_{\sigma\rho}\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')\delta(\vec{x}-\vec{x}')d\vec{x}'=\delta_{\sigma\rho}\delta(\vec{x}-\vec{x}'')$$

同理有 $\dfrac{\delta\pi_\sigma(\vec{x},t)}{\delta\pi_\rho(\vec{x}'',t)}=\delta_{\sigma\rho}\delta(\vec{x}-\vec{x}'')$。于是,

$$\{\varphi_\sigma(\vec{x},t),H\}_{P.B}=\sum_\rho\int\frac{\delta\varphi_\sigma(\vec{x},t)}{\delta\varphi_\rho(\vec{x}',t)}\frac{\delta H}{\delta\pi_\rho(\vec{x}',t)}d\vec{x}'=\frac{\delta H}{\delta\pi_\rho(\vec{x},t)}$$ [13]

同理有

$$\{\pi_\sigma(\vec{x},t),H\}_{P.B}=\sum_\rho\int\left(-\frac{\delta\pi_\sigma(\vec{x},t)}{\delta\pi_\rho(\vec{x}',t)}\frac{\delta H}{\delta\varphi_\rho(\vec{x}',t)}\right)d\vec{x}'=-\frac{\delta H}{\delta\varphi_\rho(\vec{x},t)},$$

于是，（2.24）式 $\dot{\varphi}_\sigma=\{\varphi_\sigma,H\}_{P.B}$，$\dot{\pi}_\sigma=\{\pi_\sigma,H\}_{P.B}$ 再次给出场正则方程：

$$\boxed{\dot{\varphi}_\sigma=\frac{\delta H}{\delta\pi_\sigma},\quad \dot{\pi}_\sigma=-\frac{\delta H}{\delta\varphi_\sigma}}$$

同样，还可以得到：

$$\boxed{\begin{aligned}&\{\varphi_\sigma(\vec{x},t),\pi_\rho(\vec{x}',t)\}_{P.B}=\delta_{\sigma\rho}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\\&\{\varphi_\sigma(\vec{x},t),\varphi_\rho(\vec{x}',t)\}_{P.B}=\{\pi_\sigma(\vec{x},t),\pi_\rho(\vec{x}',t)\}_{P.B}=0\end{aligned}} \quad (2.25)$$

通常，文献中将以上这些结果作为第一次量子化的跳板。

五、泛函 *Taylor* 展开

令 λ 为一参数，可以类似于通常的 ***Taylor*** 级数展开，定义泛函的 ***Taylor*** 级数展开式 [14]：

$$\boxed{F[f(x)+\lambda g(x)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\frac{\delta^n F[f(x)]}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}g(x_1)\cdots g(x_n)} \quad (2.26)$$

---

[13] 上面已设 F,G 不显含 t 了，因此这里的 H 也应不显含 t，即

$$H=\int\mathcal{H}\left(\varphi_\sigma,\partial_i\varphi_\sigma,\pi_\sigma\right)d^3x$$

[14] 杨炳麟，量子场论导引(下)，北京:科学出版社，1988。第 65 页。D.卢里书，第 513 页。

特别地，令 $f(x)=0$，$\lambda=1$，这相当于假定：$g(x)$的函数值较小，直接对泛函$F[g]$的自变数$g(x)$展开：

$$\boxed{F[g(x)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n \left.\frac{\delta^n F[g(x)]}{\delta g(x_1)\cdots\delta g(x_n)}\right|_{g=0} g(x_1)\cdots g(x_n)} \qquad (2.27)$$

这一展开又称为 ***Volterra* 级数**。

五，泛函（路径）积分定义

1，路径积分定义

这时，积分自变数是空间中（作为空间函数的）一条条路径，被积函数则是路径的泛函数。一般形式为

$$\int D\vec r(t)\cdot F\left[\vec r(t)\right] \qquad (2.28)$$

对全体可能路径的求和用$D\vec r(t)$表示。

典型例子来自 *QM* 中时间演化问题。设初始波函数分布为$\psi(\vec r_0 t_0)$，从t_0到t时刻，波函数分布演化成为$\psi(\vec r t)$。注意，**动力学演化总归是依照时序的"*Step by step*"的行为**。于是可将时间t分隔为n等分$\varepsilon=t/n$，记相应时刻的空间变数为$\vec r(m\varepsilon)=\vec r_m$，$\vec r(t_0)=\vec r_0$，$\vec r(n\varepsilon)=\vec r_n=(\vec r t)$。在每个时刻，分别插入座标表象完备性条件$\int|\vec r_i\rangle d\vec r_i\langle\vec r_i|=I$。于是，演化过程及结果可以表示为如下连乘积形式，

$$\psi(\vec r t)=\int\langle\vec r t|T\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}d\tau H(\tau)\right)|\vec r_0\rangle d\vec r_0\psi(\vec r_0 t_0)$$
$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ n\to\infty}}\int\int\cdots\int\langle\vec r_n|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H(t)\varepsilon\right)|\vec r_{n-1}\rangle d\vec r_{n-1}\langle\vec r_{n-1}|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H(t-\varepsilon)\varepsilon\right)|\vec r_{n-2}\rangle d\vec r_{n-2}\langle\vec r_{n-2}|\cdot$$
$$\cdots|\vec r_1\rangle d\vec r_1\langle\vec r_1|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H(\varepsilon)\varepsilon\right)|\vec r_0\rangle d\vec r_0\psi(\vec r_0 t_0)$$

代入$H=\frac{\vec{P}^2}{2m}+V(\vec{r})$，每重积分下被积函数矩阵元可以算出来，得[15]

$$\left\langle \vec{r}_m \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H(m\varepsilon)\varepsilon\right) \right| \vec{r}_{m-1} \right\rangle = \frac{1}{A^3}\exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{\vec{r}_{m+1}-\vec{r}_m}{2},\frac{\vec{r}_{m+1}-\vec{r}_m}{\Delta t},\frac{t_{m+1}+t_m}{2}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{A}=\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}}$$

于是总计成为

$$\boxed{\psi(\vec{r}t)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ n\to\infty}}\int\dots\int\frac{d\vec{r}_{n-1}}{A^3}\dots\frac{d\vec{r}_1}{A^3}\frac{d\vec{r}_0}{A^3}\psi(\vec{r}_0t_0)\exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{i=0}^{n-1}L\left(\frac{\vec{r}_{i+1}+\vec{r}_i}{2},\frac{\vec{r}_{i+1}-\vec{r}_i}{\varepsilon},\frac{t_{i+1}+t_i}{2}\right)\right\}}$$

（2.29a）

在极限下，这个无穷重积分下的被积指数是空间路径的泛函数。它将整条空间路径函数$(\vec{r}_0t_0\to\vec{r}_1t_1\to\vec{r}_2t_2\to\cdots)\Rightarrow(\vec{r}t)$当作自变量，每给定一条空间路径（空间函数），被积泛函指数求和就有一个复数，再依照（作为积分自变数的）全体可能空间路径求和。所以，积分实质上是个泛函积分。或者，将全部各重积分求和乘开立即知道，积分求和的每一项都对应一条空间路径，最终结果是对全部可能空间路径再求和。由于求和对象的自变数是空间路径函数，通常将这种空间路径相关的特殊泛函积分称作路径积分。利用传播子U和作用量S，可记为

$$\boxed{\begin{cases}\psi(\vec{r}t)=\int d\vec{r}_0\ U(\vec{r}t;\vec{r}_0t_0)\psi(\vec{r}_0t_0)\\ U(\vec{r}t;\vec{r}_0t_0)=\int D\vec{r}(t)\exp\{iS/\hbar\}\\ S[\vec{r}(t)]=\int dt\ L[\vec{r}(t),\vec{p}(t),t]\end{cases}}\qquad（2.29b）$$

$(\vec{r}t)$和$(\vec{r}_0t_0)$分别是系统时空演化时头尾两个参考点，$\vec{r}(t)$为连结两个时空点的一切可能的路径（包括极端陡峭的所有各类折线！）。

2，泛函积分定义[16]

---

[15] 张永德，高等量子力学（第2版，下册），北京：科学出版社，2010年。第7.1节。

这时，无穷重积分的积分自变数是有关场的场量——时空函数，而被积函数则是这些场量的某种泛函数。一般写为

$$\boxed{\int D\varphi(\vec{r}t)\cdot F\left[\varphi(\vec{r}t)\right]} \qquad (2.30)$$

这里用$D\varphi(\vec{r}t)$表示对（作为时空函数的）场量求和。当然，定义可以推广到多个场量情况，成为多重泛函积分。对于多数相互作用，被积泛函的指数可能为非二次型形式（这时积分测度尚未知晓，严格说相应泛函积分未有定义）。但泛函积分经常采用相对比值形式，伴有同类型泛函积分作为分母，以期消去因式化的不确定因子或发散因子。

具体事例是量子场论中 ***Green* 函数生成泛函**。例如，**旋量-量子电动力学的 *Green* 函数生成泛函**，

$$\boxed{\begin{cases} Z[\eta]=\dfrac{1}{N}\displaystyle\int D\psi D\bar{\psi}\prod_{\mu}DA_{\mu}\cdot\exp\left\{i\int d^4x\mathcal{L}_{eff}\right\}\exp\left\{i\int d^4x\left(\bar{\psi}\eta+\psi\bar{\eta}+J_{\mu}A_{\mu}\right)\right\} \\ \mathcal{L}_{eff}=-\bar{\psi}(\gamma\cdot\partial+m)\psi-\dfrac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2+ie\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A_{\mu}-\dfrac{1}{2\varsigma}\left(\partial_{\mu}A_{\mu}\right)^2 \quad , \quad N=Z[0] \end{cases}} \qquad (2.31)$$

其中，任意函数$\eta(x),\bar{\eta}(x),J_{\mu}(x)$都是工具性的外源函数。这个泛函积分的自变量是（作为时空函数的）场量$\psi(x),\bar{\psi}(x),A_{\mu}(x)$。被积泛函指数中的$-\dfrac{1}{2\varsigma}\left(\partial_{\mu}A_{\mu}\right)^2$项，物理上源自规范约束条件$\partial_{\mu}A_{\mu}=0$，来自该条件的 ***Fresnel*** 型泛函δ函数表示（见下讲）。这里，被积泛函指数是个二次型形式，此泛函积分是可积的。

有关泛函积分的进一步众多性质见下讲。

[16] 见脚注 **14** 杨炳麟书。