[高等量子理论专题系列讲座]

近代量子理论中的几个数学专题

提纲

※ ※ ※ ※

[量子系列专题讲座]

[第 1 讲]

［第一讲］ 无穷乘积计算和算符行列式计算

提 纲

一, 无穷乘积计算

二， *Hilbert* 空间算符的算符行列式计算

三， 泛函 *Jacob* 计算

※ ※ ※ ※

一, 无穷乘积计算

1， 问题的提出

这是有限维空间变换的变换行列式向无限维函数空间的推广。变

换 *Jacobi* 则是有限维积分变数变换向无限维情况的推广。本讲涉及的 *Jacobi* 主要指场量变换的 *Jacobi*，也就是路径(泛函)积分中的函数变换变换情况（注意，不是有限个独立变数之间的变换）。

当路径(泛函)积分的场量进行线性变换情况下，*Jacobi* 与变换行列式不但有一简单关系（玻色情况与费米情况不同），而且常常（但不一定）和作为积分变量的场量无关，可以抽出积分号外，从而和归一化分母中相同量相消。但对复杂或非线性变换情况下，*Jacobi* 一般与场量有关，不能抽出积分号外，将会影响路径积(泛函)分计算。

由于 *Jacobi* 以及积分测度与算符行列式有关（比如，有相互作用的耦合场情况下，算符行列式就将和另外场量有关）。所以必须首先搞清楚算符行列式的计算。

2，无穷乘积收敛的定义

[定 义] 一个无穷乘积 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\cdots \equiv \prod_{m=1}^{\infty}(1+a_m)$（这里 a_m 可为复数），当其部分乘积 $p_n = \prod_{m=1}^{n}(1+a_m)$ 序列 $(p_1, p_2, \cdots)$ 有非零有限极限存在 $\lim_{n\to\infty} p_n = C\,(C \neq 0)$，就称此无穷乘积是收敛的。如果 $C=0$ 或 ∞，则称此无穷乘积发散于零或发散。

[例 1] 乘积 $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdots$ 是收敛的。

3, 无穷乘积收敛的几个定理

[定理 1] **若 $\{a_n\}$ 全部同号（大于零，或同为负值但绝对值小于 1），则 $\prod_{m=1}^{\infty}(1+a_m)$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ 同为收敛或同为发散。**

[定理 2] 若$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+|a_m|\right)$收敛，则$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+a_m\right)$必定收敛。

此定理意思即是：绝对收敛的无穷乘积一定收敛。可以证明：绝对收敛无穷乘积的各因子次序可以任意更换而不改变乘积的数值。

[例 2] $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

证明：$p_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}$

[例 3] 由π的 *Wallis* 公式$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$，可得

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)=\frac{\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)}=\frac{2}{\pi}$$

[定理 3] 无穷乘积$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+|a_m|\right)$收敛充要条件是级数$\sum_{m=1}^{\infty}\ln\left(1+a_m\right)$收敛。

说明 1，如果$\sum_{m=1}^{\infty}a_m$与$\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2$收敛，则$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+a_m\right)$收敛。

说明 2，如果$\sum_{m=1}^{\infty}a_m$，$\sum_{m=1}^{\infty}a_m{}^2,\cdots$，$\sum_{m=1}^{\infty}a_m{}^{k-1}$以及$\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^k$都收敛，乘积$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+a_m\right)$收敛。这是例 1 的推广。

说明 3，如果a_n为实数，且$\sum_{m=1}^{\infty}a_m$收敛，则$\sum_{m=1}^{\infty}a_m{}^2$收敛时，导致$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+a_m\right)$收敛，$\sum_{m=1}^{\infty}a_m{}^2$发散导致$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+a_m\right)$发散于零。

[定理 4] 如果$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x)\right|$在某一域内一致收敛，且$u_n(x)\neq-1$，则无

穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+u_n(x)\right)$也在该域内一致收敛。

[例 4] 有 *Vieta* 公式

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

[例 5] $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$当$x>1$时绝对收敛，当$\frac{1}{2}<x\le 1$时条件收敛，当$0<x\le\frac{1}{2}$时，发散于零。

[例 6] 三角函数和双曲函数的无穷乘积展开

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\quad,\quad\cos\pi x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right)$$

$$shx=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\quad,\quad chx=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right)$$

二，*Hilbert* 空间算符的算符行列式计算

1，*Hilbert* 空间算符行列式的定义

众所周知，在 ***Hilbert*** 空间中取定一组可数的正交完备基，便可以将任意算符$\hat{\Omega}$表示作为一个无限维矩阵。记矩阵本征值——算符本征值为$\{\omega_i, i=1,2,\cdots\}$，可以推广有限维矩阵行列式的定义：**[定义] 算符$\hat{\Omega}$的行列式$Det\hat{\Omega}$等于$\hat{\Omega}$的无穷个本征值$\{\omega_i, i=1,2,\cdots,\infty\}$的乘积，**

$$\boxed{Det\hat{\Omega}\equiv\prod_{i=1}^{\infty}\omega_i=\exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\ln\omega_i\right\}}\qquad(1.1a)$$

一般不知道（或不全知道）算符的本征值$\{\omega_i, i=1,2,\cdots\}$，并且鉴于不少算符$\hat{\Omega}$具有连续谱，这时常常写作

$$\boxed{Det\,\hat{\Omega}=\exp\left\{S_P\left(\ln\hat{\Omega}\right)\right\}} \tag{1.1b}$$

右边指数上求迹S_P的含义有两方面的内容：i，在函数空间中进行求迹运算。即，将作为积分变换（或一般说，函数变换）核的算符$\Omega(x,y): f(y)\to g(x)$，令$x=y$之后在$x$定义域上积分。ii，如果$\Omega(x,y)$还另有分立指标并构成一个多维矩阵，还要对所有分立指标求迹。具体写出来，S_P含义即为：

$$\Omega_{\alpha\beta}(x,y)=\langle x|\hat{\Omega}(\alpha,\beta)|y\rangle \;\Rightarrow\; S_P\hat{\Omega}=\sum_{\alpha}\int\Omega_{\alpha\alpha}(x,x)\,dx$$

例如，设算符$\hat{\Omega}$在 4 维动量表象中已经对角化（见下面例子），即有

$$\hat{\Omega}=\omega(p)\otimes\hat{I}\;\Rightarrow\;\Omega(p',p)\equiv\langle p'|\hat{\Omega}|p\rangle=\omega(p)\delta(p'-p)$$

但$\omega(p)$还是另外自由度的$n\times n$矩阵。此时算符$\hat{\Omega}$的行列式定义为

$$\begin{aligned}Det\,\hat{\Omega}&=\exp\left\{S_P\left[\ln\hat{\Omega}\right]\right\}=\exp\left\{S_P\left[\ln\left(\omega(p)\otimes\hat{I}\right)\right]\right\}\\&=\exp\left\{S_P\left[\left(\ln\omega(p)\right)\otimes\hat{I}\right]\right\}\\&=\exp\left\{tr\int\left(\ln\omega(p)\right)\delta^{(4)}(p'-p)\,d(p'p)\right\}\end{aligned}$$

由此得

$$\boxed{Det\,\hat{\Omega}=\exp\left\{tr\int\ln\omega(p)\,dp\right\}} \tag{1.1c}$$

tr 是对$n\times n$矩阵$\ln\omega(p)$的求迹运算。就是说，设$\lambda_i\,(i=1,\cdots,n)$是$\omega(\bar{p})$的本征值，$N$ 为使$\omega(p)$对角化的满秩$n\times n$矩阵，则

$$tr\left[\ln\omega(p)\right]=tr\left[\ln\left(N\omega(p)N^{-1}\right)\right]=tr\left[\ln\begin{pmatrix}\lambda_1(p)&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n(p)\end{pmatrix}\right]$$

$$=tr\begin{pmatrix}\ln\lambda_1(p)&&0\\&\ddots&\\0&&\ln\lambda_n(p)\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i(p)=\ln\left(\lambda_1(p)\cdots\lambda_n(p)\right)$$

即$tr\left[\ln\omega(p)\right]=\ln\left[\det\omega(p)\right]$。于是$\lambda_i(p)$全都不能为零，否则算符行列

式为零。最后又可得

$$\boxed{Det\,\hat{\Omega}=\exp\left\{\int\ln\left[\det\omega(p)\right]dp\right\}} \qquad (1.1d)$$

下面也常将算符行列式直接记作“ $Det\,\hat{\Omega}=det\,\hat{\Omega}$ ”。

2, 算符行列式的存在条件

依据前面定理 2 得：

“行列式 $Det\,\hat{\Omega}$ 存在的充分条件是 $\hat{\Omega}$ 与单位算符只相差一个迹为绝对可和的算符。”

又，依据前面定理 3（或（1.1d）式）得：

“行列式 $Det\,\hat{\Omega}$ 存在的充要条件是积分 $\int\ln\left[\det\omega(p)\right]dp$ 收敛。”

3, 平方为对角化的算符的行列式计算

这时包括自逆算符（但显然不包括投影算符），有 $\hat{\Omega}^2=\omega^2\otimes\hat{I}$，将它们写为指数形式再取对数即可（$\alpha$ 为任意待选参数），

$$\boxed{\exp\left\{i\,\alpha\,\omega\frac{\hat{\Omega}}{\omega}\right\}=\cos(\alpha\,\omega)+i\sin(\alpha\,\omega)\cdot\frac{\hat{\Omega}}{\omega}} \qquad (1.2a)$$

可选 $\alpha\,\omega=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}\omega(p,m)=\alpha(p,m)$，即得 $\hat{\Omega}$ 的指数形式为

$$\boxed{\hat{\Omega}=\omega\exp\left\{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{\hat{\Omega}}{\omega}-1\right)\right\}} \qquad (1.2b)$$

对它取对数，再对动量及内禀空间取迹，求得此类算符的行列式为

$$\boxed{Det\,\hat{\Omega}=\exp\left\{S_p\int d^4p\left[\ln\Omega+i\frac{\pi}{2}\left(\frac{\hat{\Omega}}{\Omega}-1\right)\right]\right\}} \qquad (1.2c)$$

4, 几个例算

▲例 1：由（1.1d）式，有

$$
\begin{aligned}
Det(\gamma_\mu \partial_\mu + m) &= \exp\left\{S_P \int d^4 p\left[\ln(ip\cdot\gamma + m)\right]\right\} \\
&= \exp\left\{\int d^4 p \ln\left[\det(ip\cdot\gamma + m)\right]\right\} \\
&= \exp\left\{\int d^4 p \ln\left[\left(p^2 + m^2\right)^2\right]\right\} \\
&= \exp\left\{4\int d^4 p \ln m + 2\int d^4 p \ln\left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

由于积分$\int d^4 p \frac{p^2}{m^2}$发散，此行列式发散，需重整。应当指出，算符行列式发散并不成问题。因为在生成泛函的分母归一化因子中也有对应算符的行列式，从而相消。

▲例 2:

$$
\begin{aligned}
Det\left[(\gamma_\mu \partial_\mu + m)^{-1}\right] &= \exp\left\{S_P \int d^4 p\left[\ln \frac{1}{ip\cdot\gamma + m}\right]\right\} \\
&= \exp\left\{- S_P \int d^4 p\left[\ln(ip\cdot\gamma + m)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

此行列式发散于零。

▲例 3:

$$
Det\left[\delta_{\mu\nu}\left(\partial_\lambda^2 - M^2\right) - \partial_\mu \partial_\nu\right] = \exp\left\{S_P \int d^4 k \ln\left[k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}\left(k^2 + M^2\right)\right]\right\}
$$

$$
= \exp\left\{\int d^4 k \ln\left[\det\left(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}\left(k^2 + M^2\right)\right)\right]\right\} = \exp\left\{\int d^4 k \ln\left[M^2\left(k^2 + M^2\right)^3\right]\right\}
$$

$$
= \exp\left\{8\int d^4 k \cdot \ln M + 3\int d^4 k \ln\left(1 + \frac{k^2}{M^2}\right)\right\}
$$

这里，用了等式

$$
\det\left[k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}\left(k^2 + M^2\right)\right] = (-1)^n M^2\left(k^2 + M^2\right)^{n-1}, \quad k = (k_1, \cdots, k_n)
$$

由于$\int d^4 k\left(\frac{k^2}{M^2}\right)$发散，此行列式发散。

三，泛函 *Jacob* 计算

本节内容详细见第 3 讲（泛函积分的数学分析）中“泛函 *Jacobi*

计算”部分。

1, *Green* 函数方法

设有算符$\hat{\Omega}$的 ***Green*** 函数方程及 **4** 维动量空间表示，

$$\hat{\Omega}\hat{S}_F=\hat{I}\ \Rightarrow\ \hat{\Omega}^{-1}=\hat{S}_F=S_F(k)\otimes\hat{I} \qquad (1.3)$$

$$\int d^4k'\Omega(k,k')S_F(k',k'')=\int d^4k'\Omega(k,k')\Omega^{-1}(k',k'')=\delta(k-k'')$$

因此

$$\begin{aligned} Det\,\hat{\Omega}&=\exp\left\{S_P\ln\hat{\Omega}\right\}=\exp\left\{-S_P\ln\hat{\Omega}^{-1}\right\}\\ &=\exp\left\{-S_P\ln\left(S_F(k)\otimes\hat{I}\right)\right\}=\exp\left\{-S_P\left[\ln\left(S_F(k)\right)\otimes\hat{I}\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \boxed{Det\,\hat{\Omega}=\exp\left\{-tr\int d^4k\ln S_F(k)\right\}} \qquad (1.4)$$

这里 tr 是对 **4** 维矩阵$\ln S_F(k)$的内禀空间求迹。

2, 近似展开法

泛函积分中经常会做无穷小积分变量变换，这时涉及计算“无穷小泛函变分的泛函 ***Jacobi*** ”。当场变数的变化是个无穷小泛函变分，即变换$\hat{\Omega}$接近于恒等算符时，可令$\hat{\Omega}=\hat{I}+\hat{A}$，$\hat{A}$为无穷小算符。这时可对 ***Jacobi*** 作如下近似，从而将行列式写作更为简明的形式：

$$\exp\left[\pm tr\left(\ln\hat{\Omega}\right)\right]=\exp\left[\pm tr\left(\ln\left(\hat{I}+\hat{A}\right)\right)\right]$$

$$\boxed{Det\,\hat{\Omega}\simeq\exp\left[\pm\ tr\,\hat{A}\right]\simeq\hat{I}\pm tr\left(\hat{A}\right)} \qquad (1.5)$$