卡[量子系列专题讲座]

近代量子理论中的几个数学专题

提纲

※ ※ ※ ※

[量子系列专题讲座]

[第 2 讲]

泛函、泛函变分与泛函导数计算，泛函(路径)积分定义

提 纲

一，泛函数

二，泛函变分与泛函导数

三，泛函导数的性质与计算

四，经典场论与泛函 *Poisson* 括号

五、泛函 *Taylor* 展开

六，泛函（路径）积分定义

一，泛函数

1，概述

数学量之间的一般关系称作“映射（*Map*）”。粗分为 4 大类 ：

“数→数”的映射 $\Rightarrow$ 函数;

“函数→数”的映射 $\Rightarrow$ 泛函数;

“函数→函数”的映射 $\Rightarrow$ 算符;

“算符→算符”的映射 $\Rightarrow$ 超算符。

下面只叙述其中第二条。

2，泛函数定义

泛函数简称作泛函，是将一类函数集合中的每一个函数映射到某个实(复)数集合中的某个数。每一种映射方式就称作一个泛函数。这时，作为泛函因变数的是实(复)数值，因变数所依赖的自变数就是函数。比如，某个固定空间点的电势是电荷空间分布的泛函数，旅游费用是旅游路线的泛函数，等等.

泛函数 F 对函数 $\varphi(\vec{x})$ 的依赖关系用方括号表示 $F[\varphi(\vec{x})]$。泛函 $F[\varphi(\vec{x})]$ 特征是它不依赖于函数 $\varphi(\vec{x})$ 在任一特定点的值，而是依赖于 $\varphi(\vec{x})$ 在整个定义域的值，即，依赖于 $\varphi(\vec{x})$ 的整个形状。因此，自变量 $\vec{x}$ 是傀标，于是 $F[\varphi(\vec{x})]=F[\varphi(\vec{y})]=F[\varphi]$。比如

$$F\left[\varphi(\vec{x})\right]=\int_a^b \varphi(\vec{x})d\vec{x}\,,\quad F\left[\varphi(x)\right]=\varphi(x_0)=\int_a^b \delta(x-x_0)\varphi(x)dx$$

$$S\left[\varphi(x)\right]=\int_a^b \mathcal{L}\left(\varphi(x),\nabla\varphi(x),\dot{\varphi}(x)\right)d^4x$$

$$F\left[\varphi(\vec{x})\right]=\left\langle\psi(\vec{x})\middle|\varphi(\vec{x})\right\rangle,\quad \Delta V(\vec{x})=-4\pi\rho(\vec{x})\to V(\vec{x}_0)=V\left[\rho(\vec{x})\right]=\frac{-4\pi}{\Delta}\rho(\vec{x})$$

二，泛函变分与泛函导数

1，泛函变分与泛函导数定义

[泛函变分定义] 令函数 $\varphi(\bar{x})$ 有一无穷小变分 $\varphi(\bar{x})\to\varphi'(\bar{x})=\varphi(\bar{x})+\delta\varphi(\bar{x})$，由此所导致的泛函 $F[\varphi'(\bar{x})]=F[\varphi(\bar{x})+\delta\varphi(\bar{x})]$ 变化称作泛函 $F[\varphi(\bar{x})]$ 的变分，记作

$$\delta F=F[\varphi'(\bar{x})]-F[\varphi(\bar{x})]=F[\varphi(\bar{x})+\delta\varphi(\bar{x})]-F[\varphi(\bar{x})] \qquad (2.1)$$

令函数 $\varphi(\bar{x})$ 在点 $\bar{y}$ 处有一无穷小变分 $\delta\varphi(\bar{x})=\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{y})$，它导致的泛函 $F[\varphi(\bar{x})]$ 的变化率称作 $F[\varphi(\bar{x})]$ 在点 $\bar{y}$ 处的泛函导数 $\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}$。即有

[泛函导数定义] 泛函 $F[\varphi(\bar{x})]$ 在某一点 $\bar{y}$ 处的泛函导数为：

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[\varphi(\bar{x})+\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{y})]-F[\varphi(\bar{x})]}{\varepsilon} \qquad (2.2)$$

注意，这里特殊变分中所含无穷小量 ε 的真正意图是：**在展开分子泛函 $F[\varphi(\bar{x})+\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{y})]$ 时，只需计及含 ε 的一阶项，可以略去含 ε 二阶及以上的项。于是，展开式一阶项所含 ε 和分母的 ε 相消。**只要注意这样做，就可以直接令 $\delta\varphi(\bar{x})=\delta(\bar{x}-\bar{y})$，定义中也不要除以 ε 并取极限。显然，$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}$ 度量泛函数 $F[\varphi(\bar{x})]$ 对点 $\bar{y}$ 处 $\varphi(\bar{x})$ 数值变化的敏感程度。

如若将 $\varphi(\bar{x})$ 看成电荷的空间密度，则 $\delta\varphi(\bar{x})=\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{x}')$ 是某瞬间在点 $\bar{x}_0$ 处产生的大小为 ε 的电荷。如果量 F 是 $\varphi(\bar{x})$ 的泛函（可以是某类的位势、场强度），则 $\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{x}_0)}$ 表征：由于点 $\bar{x}_0$ 处出现单位电荷引起的 F 的变化。

接着，令函数 $\varphi(\bar{x})$ 有一小变分 $\delta\varphi(\bar{x})=\varphi'(\bar{x})-\varphi(\bar{x})$，则泛函 F 的总变分 $\delta F\equiv F[\varphi']-F[\varphi]$ 等于各点变分 $\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}\delta\varphi(\bar{y})$ 之和。这导致下面泛

函变分和泛函导数之间的关联，

[泛函导数与泛函变分关联定义] 泛函数 $F\left[\varphi(\bar{x})\right]$ 的变分 $\delta F\left[\varphi(\bar{x})\right]$ 由各点处泛函导数 $\dfrac{\delta F\left[\varphi\right]}{\delta\varphi(\bar{y})}$ 和相应变分 $\delta\varphi(\bar{y})$ 的乘积积分所决定：

$$\begin{cases} \delta F \equiv F\left[\varphi+\delta\varphi\right]-F\left[\varphi\right]=\int \dfrac{\delta F\left[\varphi\right]}{\delta\varphi(\bar{y})}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y} \\ F\left[\varphi+\delta\varphi\right]=F\left[\varphi\right]+\int \dfrac{\delta F\left[\varphi\right]}{\delta\varphi(\bar{y})}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y} \end{cases} \tag{2.3}$$

其实，这也可以看作是泛函导数的由泛函变分表示的另一个定义。

（2.2）式和（2.3）式的等价关联是明显的。因为，假定对任意参考点 $\bar{y}$ 有特殊变分 $\delta\varphi(\bar{y})=\varepsilon\delta\left(\bar{x}-\bar{y}\right)$，代入积分表达式（2.3）式即可得到（2.2）式。同时，也可以由（2.2）式导出（2.3）式。从（2.2）式左边出发，乘以 $\delta\varphi(\bar{y})$，对 $\bar{y}$ 积分可得

$$\int \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{y})}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y}=\int \frac{F\left[\varphi(\bar{x})+\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{y})\right]-F\left[\varphi(\bar{x})\right]}{\varepsilon}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y}$$

此式右边其实就是（2.3）式的左边。因为有

$$\begin{aligned}
&\int \frac{F\left[\varphi(\bar{x})+\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{y})\right]-F\left[\varphi(\bar{x})\right]}{\varepsilon}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y} \\
&=\int \frac{1}{\varepsilon}\left\{F\left[\varphi(\bar{x})\right]+\int \frac{\delta F\left[\varphi(\bar{x})\right]}{\delta\varphi(\bar{x})}\varepsilon\delta(\bar{x}-\bar{y})d\bar{x}-F\left[\varphi(\bar{x})\right]\right\}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y} \\
&=\int\left\{\int \frac{\delta F\left[\varphi(\bar{x})\right]}{\delta\varphi(\bar{x})}\delta(\bar{x}-\bar{y})d\bar{x}\right\}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y}=\int \frac{\delta F\left[\varphi\right]}{\delta\varphi(\bar{y})}\delta\varphi(\bar{y})d\bar{y} \\
&=F\left[\varphi(\bar{x})+\delta\varphi(\bar{x})\right]-F\left[\varphi(\bar{x})\right]=\delta F\left[\varphi(\bar{x})\right]
\end{aligned}$$

证毕。

还可以如下看泛函导数：比如 ***Lagrangian*** $L(t)=L\left[\varphi(\bar{x},t),\dot{\varphi}(\bar{x},t)\right]$，有：

$$\delta L(t)=\int\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right)d\bar{x} \tag{2.4a}$$

另一方面，在分立记号中有（$\varphi_i(t)\equiv\varphi(\vec{x}_i,t)$）[1]：

$$\delta L(\varphi,\dot{\varphi})=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\dot{\varphi}_i\right)=\sum_i\left(\frac{1}{\delta V_i}\frac{\partial L}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i+\frac{1}{\delta V_i}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i}\delta\dot{\varphi}_i\right)\delta V_i \qquad \textbf{(2.4b)}$$

令(2.4a)式是(2.4b)式的连续极限，由于不同点变分互相独立，可得：

$$\boxed{\frac{\delta L}{\delta\varphi(\vec{x},t)}=\lim_{\delta V_i\to 0}\frac{1}{\delta V_i}\frac{\partial L(t)}{\partial\varphi_i(t)},\quad \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}(\vec{x},t)}=\lim_{\delta V_i\to 0}\frac{1}{\delta V_i}\frac{\partial L(t)}{\partial\dot{\varphi}_i(t)}} \qquad \textbf{(2.5)}$$

这里还要除以δV_i，因为泛函导数在乘以$\delta\varphi$后还要$d\vec{x}$积分，才得到变分δL。其中$\vec{x}$位于第i个小盒中。由(2.5)式得知，实质上，在$(\vec{x},t)$点处泛函导数$\dfrac{\delta L}{\delta\varphi(\vec{x},t)}$正比于$L(t)$对函数$\varphi(\vec{x}t)$在该点处的导数。

三，泛函导数的性质与计算

1、泛函导数满足通常的微分性质：

i. $$\boxed{\frac{\delta a}{\delta\varphi(\vec{x})}=0}$$

ii. $$\boxed{\frac{\delta\{aF[\varphi]+bG[\varphi]\}}{\delta\varphi(\vec{x})}=a\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}+b\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}}$$

iii. $$\boxed{\frac{\delta\{F[\varphi]G[\varphi]\}}{\delta\varphi(\vec{x})}=\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}G[\varphi]+F[\varphi]\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}} \qquad \textbf{(2.6)}$$

证明 iii：按定义，一方面

$$\delta\{F[\varphi]G[\varphi]\}=F[\varphi+\delta\varphi]G[\varphi+\delta\varphi]-F[\varphi]G[\varphi]=\int\frac{\delta\{F[\varphi]G[\varphi]\}}{\delta\varphi(\vec{x})}\delta\varphi(\vec{x})d\vec{x}$$

另一方面，

[1] D.卢里, <粒子与场>, 科学出版社, 1981 年。P.61。

$$
\begin{aligned}
&F[\varphi+\delta\varphi]G[\varphi+\delta\varphi]-F[\varphi]G[\varphi]\\
&=\left(\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}\delta\varphi d\bar{x}+F[\varphi]\right)\left(\int\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}\delta\varphi d\bar{x}+G[\varphi]\right)-F[\varphi]G[\varphi]\\
&\cong\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}\delta\varphi d\bar{x}\cdot G[\varphi]+F[\varphi]\cdot\int\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}\delta\varphi d\bar{x}
\end{aligned}
$$

有

$$
\int\frac{\delta\{F[\varphi]G[\varphi]\}}{\delta\varphi}\delta\varphi d\bar{x}=\int\left[\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}G[\varphi]+F[\varphi]\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}\right]\delta\varphi d\bar{x}
$$

由于变分$\delta\varphi$的任意性，故得，

$$
\frac{\delta\{F[\varphi]G[\varphi]\}}{\delta\varphi(\bar{x})}=\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{x})}G[\varphi]+F[\varphi]\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(\bar{x})}
$$

iv. 复合泛函的泛函导数

$$
\boxed{\frac{\delta F[\eta[\varphi]]}{\delta\varphi(x)}=\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\eta(x')}\frac{\delta\eta(x')}{\delta\varphi(x)}dx'}\tag{2.7}
$$

证明 iv：$\displaystyle\int\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)}\delta\varphi(x)dx=\int\frac{\delta F}{\delta\eta(x')}\delta\eta(x')dx'=\iint\frac{\delta F}{\delta\eta(x')}\frac{\delta\eta(x')}{\delta\varphi(x)}\delta\varphi(x)dx'\Rightarrow$

$\displaystyle\frac{\delta F[\eta[\varphi]]}{\delta\varphi(x)}=\int\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\eta(x')}\frac{\delta\eta(x')}{\delta\varphi(x)}dx'$；这里，泛函变分$\delta\eta(x')$的含义是：当$\varphi(x)$改变$\delta(x-x')$时$\eta[\varphi]$的改变。

v，按泛函导数定义，有如下关系：

$$
\boxed{\frac{\delta\varphi_\sigma(x')}{\delta\varphi_\rho(x)}=\delta_{\sigma\rho}\delta(x-x')\ ;\quad\frac{\delta\partial'_\mu\varphi_\sigma(x')}{\delta\varphi_\rho(x)}=\delta_{\sigma\rho}\partial'_\mu\delta(x-x')}\tag{2.8}
$$

证明：$\displaystyle\varphi_\sigma(x')=\sum_\rho\int\delta_{\sigma\rho}\varphi_\rho(x'')\delta(x''-x')d^4x''$，若固定$x'$，此式或是$\varphi_\sigma(x'')$积分的泛函，按泛函导数的定义得：

$$
\frac{\delta\varphi_\sigma(x')}{\delta\varphi_\rho(x)}=\int\delta_{\sigma\rho}\delta(x''-x)\delta(x''-x')d^4x''=\delta_{\sigma\rho}\delta(x'-x)
$$

类似，泛函$\displaystyle\partial'_\mu\varphi_\sigma(x')=\sum_\rho\int\delta_{\sigma\rho}\delta(x''-x')\partial''_\mu\varphi_\rho(x'')d^4x''$，令$\varphi_\rho(x'')=\delta(x''-x)$，

即得其泛函导数的该式。

2，泛函变分与泛函导数计算（I）

i，$G[\varphi(x)]=\int g(\varphi(x))dx$，则泛函导数[2]

$$\frac{\delta G[\varphi(x)]}{\delta\varphi}=\int\left\{g\left(\varphi(x')+\delta(x'-x)\right)-g\left(\varphi(x')\right)\right\}dx'=\int\frac{\partial g}{\partial\varphi}(x)\delta(x'-x)dx'=\frac{\partial g}{\partial\varphi}(x)$$

$$\boxed{\frac{\delta G[\varphi(x)]}{\delta\varphi}=\frac{\partial g}{\partial\varphi}(x)} \tag{2.9}$$

ii，若$G[\varphi(x)]=\int g(\nabla\varphi(x))dx$ 则有

$$\boxed{\frac{\delta G}{\delta\varphi}(x)=-\nabla\frac{\partial g}{\partial\nabla\varphi}(x)} \tag{2.10}$$

iii，若$G[\varphi(x)]=G(\varphi(x))$，则，

$$\frac{\delta G(x)}{\delta\varphi(x')}=\frac{\delta}{\delta\varphi(x')}\int G\left(\varphi(x'')\right)\delta(x-x'')dx''$$

$$=\int\left\{G\left(\varphi(x'')+\varepsilon\,\delta(x''-x')\right)-\left(G\varphi(x'')\right)\right\}\frac{1}{\varepsilon}\quad\delta\ (x-\quad x'$$

$$=\int\frac{\partial\left\{G\left(\varphi(x'')\right)\right\}}{\partial\varphi(x'')}\delta(x''-x')\delta(x-x'')dx''=\frac{\partial G}{\partial\varphi}(x)\delta(x-x')$$

$$\boxed{\frac{\delta G(x)}{\delta\varphi(x')}=\frac{\partial G}{\partial\varphi}(x)\delta(x-x')} \tag{2.11}$$

iv，若$G[\varphi(x)]=G\left(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x)\right)\equiv G(x)$，则

$$\frac{\delta G(x)}{\delta\varphi(x')}=\frac{\delta}{\delta\varphi(x')}\int G(x'')\delta(x-x'')dx''=$$

$$=\int\left\{G\left(\varphi(x'')+\varepsilon\delta(x''-x'),\partial''\left(\varphi(x'')+\varepsilon\delta(x''-x')\right)\right)-G\left(\varphi(x''),\partial''_\mu\varphi(x'')\right)\right\}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{\varepsilon}\delta(x-x'')dx''$$

---

[2] 下式的具体应用见卢里《粒子和场》，P.92

$$=\frac{\partial G}{\partial\varphi}(x)\delta(x-x')+\frac{\partial G}{\partial\partial_\mu\varphi}(x)\left(\partial_\mu\delta(x-x')\right)^{3}$$

于是，总前所述，得如下两个一般公式：

$$\boxed{G[\varphi(x)]=\int g\left(\varphi,\partial_\mu\varphi\right)dx\to\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}=\frac{\partial g}{\partial\varphi}(x)-\partial_\mu\frac{\partial g}{\partial\partial_\mu\varphi}(x)}\qquad\textbf{(2.12)}$$

$$\boxed{\begin{gathered}G[\varphi(x)]=G\left(\varphi(x),\partial_\mu\varphi(x)\right)\equiv G(x)\to(\ )\\ \frac{\delta G(x)}{\delta\varphi(x')}=\frac{\partial G}{\partial\varphi}(x)\delta(x-x')+\frac{\partial G}{\partial\partial_\mu\varphi}(x)\partial_\mu\delta(x-x')\end{gathered}}\qquad\textbf{(2.13)}$$

对第二种函数结构情况，还可写为便于记忆理解的形式：

$$\begin{aligned}&A(x)\partial_\mu\delta(x-x')=\int A(x'')\delta(x-x'')\left(\partial''_\mu\delta(x''-x')\right)dx''=\\&=A(x'')\delta(x-x'')\delta(x''-x')\Big|_{x''=-\infty}^{x''=+\infty}-\int\delta(x''-x')\partial''_\mu\left(A(x'')\delta(x-x'')\right)dx''\\&=-\int\delta(x''-x')\partial''_\mu\left(A(x'')\delta(x-x'')\right)dx''=-\partial'_\mu\left(A(x')\delta(x-x')\right)\end{aligned}$$

为取得一致，必须假定：

$$\partial'_\mu(A(x')\delta(x-x'))\equiv\partial'_\mu(A(x)\delta(x-x'))=A(x)\partial'_\mu\delta(x-x')=-A(x)\partial_\mu\delta(x-x')$$

即假定： $\boxed{\partial_\mu^{(x)}\left(A(x)\delta(x-y)\right)\equiv A(y)\left(\partial_\mu^{(x)}\delta(x-y)\right)}$ **(2.14)**

3，泛函导数与泛函变分计算（II）

若设泛函形式为 $F[\varphi(\vec{x})]=\int f\left(\varphi(\vec{x}),\nabla\varphi(\vec{x})\right)d\vec{x}$，直接算出泛函导数与泛函变分如下：

$$\begin{aligned}\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{y})}&=\frac{1}{\varepsilon}\int\left\{f\left(\varphi(\vec{x})+\varepsilon\delta(\vec{x}-\vec{y}),\nabla\varphi(\vec{x})+\nabla\varepsilon\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)-f\left(\varphi(\vec{x}),\nabla\varphi(\vec{x})\right)\right\}d\vec{x}\\&=\int\left\{\frac{\partial f}{\partial\varphi(\vec{x})}\delta(\vec{x}-\vec{y})+\frac{\partial f}{\partial\left(\nabla\varphi(\vec{x})\right)}\cdot\left(\nabla\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)\right\}d\vec{x}\\&=\int\left\{\frac{\partial f}{\partial\varphi(\vec{x})}\delta(\vec{x}-\vec{y})+\nabla\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial\left(\nabla\varphi(\vec{x})\right)}\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)-\left(\nabla\cdot\frac{\partial f}{\partial\left(\nabla\varphi(\vec{x})\right)}\right)\delta(\vec{x}-\vec{y})\right\}d\vec{x}\end{aligned}$$

于是

---

[3] 参见 *Gitman* 书，**P.63** 等页；杨炳麟书，**P.64**；殷鹏程书附录。

$$F[\varphi(\vec{x})]=\int f\left(\varphi(\vec{x}),\nabla\varphi(\vec{x})\right)d\vec{x}\ \rightarrow \boxed{\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\vec{x})}=\left\{\frac{\partial f}{\partial\varphi}-\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial(\nabla\varphi)}\right)\right\}(\vec{x})} \qquad (2.15)$$

这就是此泛函在 $\vec{x}$ 点的泛函导数。

例如 $\vec{P}(t)=-\int\sum_{\sigma}\pi_{\sigma}\nabla\varphi_{\sigma}d^3x$，有：

$$\boxed{\frac{\delta\vec{P}(t)}{\delta\pi_{\sigma}(\vec{x},t)}=-\nabla\varphi_{\sigma}(\vec{x},t),\ \frac{\delta\vec{P}(t)}{\delta\varphi_{\sigma}(\vec{x},t)}=-\nabla\pi_{\sigma}(\vec{x},t)} \qquad (2.16)$$

4、泛函导数举例（III）

计算泛函 $\lambda[\varphi]=\dfrac{\int\varphi^{*}H\varphi d\tau}{\int\varphi^{*}\varphi d\tau}$ 的泛函导数。设 φ 为复标量场，先令虚部不变，求实部变分在 $\vec{x}_0$ 的泛函导数。则有

$$\left.\frac{\delta\lambda[\varphi]}{\delta\varphi_1(\vec{x}_9)}\right|_{\varphi_2=const}=\frac{\delta\lambda[\varphi]}{\varepsilon}=\frac{\int\varphi^{*}(H-\lambda)\varepsilon\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)d\tau+\int\left[\varepsilon\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\right]^{*}(H-\lambda)\varphi d\tau}{\varepsilon\int\varphi^{*}\varphi d\tau}$$

$$=\frac{\left\{\left[(H-\lambda)\varphi\right]^{*}+(H-\lambda)\varphi\right\}_{\vec{x}=\vec{x}_0}}{\int\varphi^{*}\varphi d\tau}$$

类似地，若求虚部变分 $\delta\varphi_2=\dfrac{\varepsilon}{i}\delta(x-x_0)$ 在 $\vec{x}_0$ 的泛函导数。得

$$\left.\frac{\delta\lambda[\varphi]}{\delta\varphi_2(\vec{x}_0)}\right|_{\varphi_1=const}=\frac{-i\left\{\left[(H-\lambda)\varphi\right]^{*}+(H-\lambda)\varphi\right\}_{\vec{x}=\vec{x}_0}}{\int\varphi^{*}\varphi d\tau} \qquad (2.17)$$

四，经典场论与泛函 *Poisson* 括号 [4]

1，[泛函 *Poisson* 括号定义] 若泛函 F,G 只通过 φ,π 依赖 t（即不明显依赖于 t）[5]，则泛函 *Poisson* 括号定义如下：

$$\boxed{\{F,G\}_{P.B}=\int\left(\frac{\delta F}{\delta\varphi(\vec{x},t)}\frac{\delta G}{\delta\pi(\vec{x},t)}-\frac{\delta F}{\delta\pi(\vec{x},t)}\frac{\delta G}{\delta\varphi(\vec{x},t)}\right)d\vec{x}} \qquad (2.18a)$$

---

[4] 卢里，《粒子与场》，第 72 页

[5] 当然可依赖于 φ,π 的空间导数

其中，$\dfrac{\delta F}{\delta\varphi}$ 等是 F 对 φ 的泛函导数（在 $(\vec{x},t)$ 处）。对多个独立场 $\Omega=\Omega[\varphi_\sigma,\pi_\sigma]$，$\Gamma=\Gamma[\varphi_\sigma,\pi_\sigma]$，且泛函不明显依赖 t，泛函 ***Poisson*** 括号定义推广如下[6]：

$$\boxed{\{\Omega,\Gamma\}_{P.B}=\sum_{\sigma=1}^{N}\int\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varphi_\sigma(\vec{x},t)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\pi_\sigma(\vec{x},t)}-\frac{\delta\Omega}{\delta\pi_\sigma(\vec{x},t)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_\sigma(\vec{x},t)}\right)d\vec{x}} \qquad (2.18b)$$

泛函 ***Poisson*** 括号定义（**2.18**）和普通 ***Poisson*** 括号（无穷多自由度）实质是相同的[7]。

2，经典场的 ***Lagrange*** 框架

用 ***Lagrangian*** 的泛函导数 $\delta L/\delta\varphi_\sigma,\delta L/\delta\dot{\varphi}_\sigma$ [8]表述经典场运动方程。这时 $L(t)=\int\mathcal{L}(x)d^3x$，按泛函导数定义有

$$\delta L=\int\left\{\frac{\delta L}{\delta\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}_\sigma}\delta\dot{\varphi}_\sigma\right\}d^3x \qquad (2.19)$$

另一方面，可以实际计算为

$$\begin{aligned}\delta L&=\int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma(\vec{x},t)}\delta\varphi_\sigma(\vec{x},t)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma(\vec{x},t)\right)}\delta\left(\partial_\mu\varphi_\sigma(\vec{x},t)\right)\right\}d^3x\\&=\int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i\varphi_\sigma\right)}\delta\varphi_\sigma\right)-\left(\partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i\varphi_\sigma\right)}\right)\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\delta\dot{\varphi}_\sigma\right\}d^3x\\&=\int\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma}-\left(\partial_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi_\sigma)}\right)\right)\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\delta\dot{\varphi}_\sigma\right\}d^3x\end{aligned}$$

两者相比较，即得

---

[6] 卢里，《粒子与场》，第 **72** 页至 **74** 页。

[7] 卢里，《粒子与场》，第 **72** 页

[8]本来是相对论 **4** 维协变形式，出现如此非协变的泛函导数是由于 ***Hamilton*** 变分原理的非协变的缘故。对 t 的积分只限于 (t_1,t_2)，但更主要的是 $L(t)$ 是个只对空间的积分，非 $(\vec{x},t)$ 对称。

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L(t)}{\delta\varphi_\sigma(\vec{x},t)} = \dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},t)}{\partial\varphi_\sigma(\vec{x},t)} - \partial_i \dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},t)}{\partial\left(\partial_i\varphi_\sigma(\vec{x},t)\right)} \\ \dfrac{\delta L(t)}{\delta\dot{\varphi}_\sigma(\vec{x},t)} = \dfrac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},t)}{\partial\dot{\varphi}_\sigma(\vec{x},t)} \end{cases} \tag{2.20}$$

上面计算可推广到作用量泛函 $S[\varphi]$ 的 4 维积分协变形式 $S[\varphi]=\int\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)dx$，按 ***Hamilton*** 变分原理 $\delta S[\varphi_\alpha]=0$，求得 ***Euler-Lagrange*** 方程为 [9]

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},t)}{\partial\varphi_\sigma(\vec{x},t)} - \partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\vec{x},t)}{\partial(\partial_\lambda\varphi_\sigma(\vec{x},t))}\right) = 0,\ \left(\alpha=1,2,\cdots n\right)} \tag{2.21}$$

3，经典场的 *Hamilton* 框架，正则方程

设 ***Lagrangian*** 密度 $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\varphi_\sigma,\partial_\mu\varphi_\sigma)=\mathcal{L}(\varphi_\sigma,\partial_i\varphi_\sigma,\dot{\varphi}_\sigma)$。接着，引入新变数 $\pi_\sigma \equiv \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}$。如果能够反解出 $\dot{\varphi}_\sigma$ [10]，则可引入（替代旧变数—广义速度场 $\dot{\varphi}_\sigma$ 的）新变数—共轭动量场 π_σ，此过程称作 ***Legendre*** 变换。于是有 $\mathcal{L}=\mathcal{L}\left[\varphi_\sigma,\partial_i\varphi_\sigma,\dot{\varphi}_\sigma(\varphi_\rho,\partial_j\varphi_\rho,\pi_\rho)\right]$，而 ***Hamiltonian*** 密度则为，

$$\mathcal{H} = \sum_\sigma \pi_\sigma\dot{\varphi}_\sigma - \mathcal{L} = \mathcal{H}\left[\varphi_\sigma,\partial_i\varphi_\sigma,\pi_\sigma\right] \tag{2.22}$$

由于其中 $\dot{\varphi}_\sigma$ 已被 π_σ 所替代，故

$$\begin{aligned}\delta H = \delta\int\mathcal{H}d\vec{x} = \int\Bigg\{&\sum_{\varpi\rho}\Big(\dot{\varphi}_\sigma\delta\pi_\sigma + \pi_\sigma\frac{\partial\dot{\varphi}_\sigma}{\partial\varphi_\rho}\delta\varphi_\rho + \pi_\sigma\frac{\partial\dot{\varphi}_\sigma}{\partial(\partial_i\varphi_\rho)}\delta(\partial_i\varphi_\rho) + \pi_\sigma\frac{\partial\dot{\varphi}_\sigma}{\partial\pi_\rho}\delta\pi_\rho - \\ &-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi_\sigma)}\delta(\partial_i\varphi_\sigma) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\frac{\partial\dot{\varphi}_\sigma}{\partial\varphi_\rho}\delta\varphi_\sigma - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\frac{\partial\dot{\varphi}_\sigma}{\partial(\partial_i\varphi_\rho)}\delta(\partial_i\varphi_\rho) - \\ &-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\sigma}\frac{\partial\dot{\varphi}_\sigma}{\partial\pi_\rho}\delta\pi_\rho\Big)\Bigg\}d\vec{x} \\ &= \int\left\{\sum_\sigma\left(\dot{\varphi}_\sigma\delta\pi_\sigma - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi_\sigma)}\delta(\partial_i\varphi_\sigma)\right)\right\}d\vec{x} \\ &= \int\sum_\sigma\left\{\dot{\varphi}_\sigma\delta\pi_\sigma - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\sigma} - \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi_\sigma)}\right)\right]\delta\varphi_\sigma\right\}d\vec{x}\end{aligned}$$

---

[9] 参见张永德，《高等量子力学（上）》，北京：科学出版社。2010 年。P. 94--95。

[10] 注意，不一定能够反解出来。只当变换行列式 ***Hessian*** 不为零时才可以。见上注下册 P. 360。

但另一方面，根据泛函导数定义，有：

$$\delta H = \sum_\sigma \int \left(\frac{\delta H}{\delta \varphi_\sigma} \delta\varphi_\sigma + \frac{\delta H}{\delta \pi_\sigma} \delta\pi_\sigma \right) d\vec{x}$$

由以上两方面的对比可得[11]（$\delta\varphi_\sigma, \delta\pi_\sigma$ 任意）

$$\begin{cases} \dfrac{\delta H}{\delta \varphi_\sigma} = -\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma} + \partial_i \left(\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i \varphi_\sigma)} \right) \\ \dfrac{\delta H}{\delta \pi_\sigma} = \dot{\varphi}_\sigma \end{cases} \tag{2.23a}$$

根据场的 ***Euler-Lagrange*** 方程得知，第一式右边乃是$-\dot{\pi}_\sigma$。于是最后得到：

$$\boxed{\dot{\varphi}_\sigma = \frac{\delta H}{\delta \pi_\sigma},\ \dot{\pi}_\sigma = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_\sigma}} \tag{2.23b}$$

这就是场方程的 ***Hamiltonian*** 形式。于是，由给定的 ***Lagrangian*** 密度$\mathscr{L}$，可得 ***Hamiltonian*** 密度$\mathscr{H}$，对空间积分即得 ***Hamiltonian***，代入（**2.23b**）式得场方程。这就是 ***Hamilton*** 框架（如 ***Lagrange*** 框架，则直接由 ***Lagrangian*** 密度，按 ***Euler-Lagrange*** 方程得到场方程）。注意这里的正则方程是泛函导数（由于 H 是$(\varphi_\sigma, \pi_\sigma)$的泛函）。

这时，若有一物理量[12]：

$$\Omega = \int \omega(\varphi_\sigma, \pi_\sigma, t) d\vec{x}$$

则$\Omega = \Omega[\phi_\sigma, \pi_\sigma; t]$[13]。于是对 t 作变分δt，得：

---

[11] 这时，$\dfrac{d\Omega}{dt}$应理解为$\dfrac{\partial \varphi_\sigma}{\partial t}$和$\dfrac{\partial \pi_\sigma}{\partial t}$!因为 $\vec{x}$ 不移动的,它们是自由度的编号,与 t 无关，t 不通过 $\vec{x}$ 影响φ_σ！

[12] 若将Ω看成$\varphi_\sigma, \pi_\sigma$，则写成积分泛函形式时，不显含 t（在$(\varphi_\sigma, \pi_\sigma)$中），而得：

$$\dot{\varphi}_\sigma = \{\varphi_\sigma, H\},\ \dot{\pi}_\sigma = \{\pi_\sigma, H\}。$$

[13] Ω是φ, π 的泛函，是 t 的普通函数！

$$\frac{d\Omega[\varphi_\sigma,\pi_\sigma;t]}{dt}\delta t=\frac{\partial\Omega}{\partial t}\delta t+\sum_\sigma\int\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varphi_\sigma}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial t}+\frac{\delta\Omega}{\delta\pi_\sigma}\frac{\partial\pi_\sigma}{\partial t}\right)d\vec{x}$$

$$\frac{d\Omega[\varphi_\sigma,\pi_\sigma;t]}{dt}\delta t=\frac{\partial\Omega}{\partial t}\delta t+\sum_\sigma\int\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varphi_\sigma}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial t}+\frac{\delta\Omega}{\delta\pi_\sigma}\frac{\partial\pi_\sigma}{\partial t}\right)\delta t d\vec{x}\Rightarrow$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\int\sum_\sigma\left(\frac{\delta\Omega}{\delta\varphi_\sigma}\frac{\delta H}{\delta\pi_\sigma}-\frac{\delta\Omega}{\delta\pi_\sigma}\frac{\delta H}{\delta\varphi_\sigma}\right)d\vec{x}\qquad\text{(2.24a)}$$

于是力学量Ω的动力学方程为

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\{\Omega,H\}_{(\varphi_\sigma,\pi_\sigma)}}\qquad\text{(2.24b)}$$ [14]

这里$\frac{\delta H}{\delta\pi_\sigma},\frac{\delta H}{\delta\varphi_\sigma}$的具体含义见上页。

4，将（2.24）式中力学量Ω代以$F=\varphi_\sigma$或π_σ，并由（2.24）式出发同样得出所有结果。由于

$$\varphi_\sigma(\vec{x},t)=\int\sum_\rho\delta_{\sigma\rho}\varphi_\rho(\vec{x}',t)\delta(\vec{x}-\vec{x}')d\vec{x}'$$

根据泛函导数定义，有：

$$\frac{\delta\varphi_\sigma(\vec{x},t)}{\delta\varphi_\rho(\vec{x}'',t)}=\int\delta_{\sigma\rho}\delta(\vec{x}'-\vec{x}'')\delta(\vec{x}-\vec{x}')d\vec{x}'=\delta_{\sigma\rho}\delta(\vec{x}-\vec{x}'')$$

同理有$\frac{\delta\pi_\sigma(\vec{x},t)}{\delta\pi_\rho(\vec{x}'',t)}=\delta_{\sigma\rho}\delta(\vec{x}-\vec{x}'')$。于是,

$$\{\varphi_\sigma(\vec{x},t),H\}_{P.B}=\sum_\rho\int\frac{\delta\varphi_\sigma(\vec{x},t)}{\delta\varphi_\rho(\vec{x}',t)}\frac{\delta H}{\delta\pi_\rho(\vec{x}',t)}d\vec{x}'=\frac{\delta H}{\delta\pi_\rho(\vec{x},t)}$$ [15]

同理有

$$\{\pi_\sigma(\vec{x},t),H\}_{P.B}=\sum_\rho\int\left(-\frac{\delta\pi_\sigma(\vec{x},t)}{\delta\pi_\rho(\vec{x}',t)}\frac{\delta H}{\delta\varphi_\rho(\vec{x}',t)}\right)d\vec{x}'=-\frac{\delta H}{\delta\varphi_\rho(\vec{x},t)},$$

---

[14] 这里的$\frac{\partial\Omega}{\partial t}$与$\frac{d\Omega}{dt}$的差别不像经典（$\vec{x}=\vec{x}(t)$），只表明$\Omega$显含$t$与否！

[15] 上面已设F,G不显含t了，因此这里的H也应不显含t，即

$$H=\int\mathscr{H}(\varphi_\sigma,\partial_i\varphi_\sigma,\pi_\sigma)d^3x$$

于是，（2.24）式 $\dot{\varphi}_\sigma=\{\varphi_\sigma,H\}_{P.B}$，$\dot{\pi}_\sigma=\{\pi_\sigma,H\}_{P.B}$ 再次给出场正则方程：

$$\dot{\varphi}_\sigma=\frac{\delta H}{\delta\pi_\sigma},\quad \dot{\pi}_\sigma=-\frac{\delta H}{\delta\varphi_\sigma}$$

同样，还可以得到：

$$\boxed{\begin{aligned}&\{\varphi_\sigma(\vec{x},t),\pi_\rho(\vec{x}',t)\}_{P.B}=\delta_{\sigma\rho}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\\&\{\varphi_\sigma(\vec{x},t),\varphi_\rho(\vec{x}',t)\}_{P.B}=\{\pi_\sigma(\vec{x},t),\pi_\rho(\vec{x}',t)\}_{P.B}=0\end{aligned}} \tag{2.25}$$

以上这些结果通常文献中作为第一次量子化的跳板。

五、泛函 *Taylor* 展开

令 λ 为一参数，可以类似于通常的 ***Taylor*** 级数展开，定义泛函的 ***Taylor*** 级数展开式：

$$\boxed{F[f(x)+\lambda g(x)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\frac{\delta^n F[f(x)]}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}g(x_1)\cdots g(x_n)} \tag{2.26}$$

特别地，令 $f(x)=0$，$\lambda=1$，这相当于假定：$g(x)$ 的函数值较小，直接对泛函 $F[g]$ 的自变数 $g(x)$ 展开：

$$\boxed{F[g(x)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\left.\frac{\delta^n F[g(x)]}{\delta g(x_1)\cdots\delta g(x_n)}\right|_{g=0}g(x_1)\cdots g(x_n)} \tag{2.27}$$

这一展开又称为 ***Volterra* 级数**。[16]

五，泛函（路径）积分定义

1，路径积分定义

这时，被积函数是路径的泛函数，作为积分变数的则是路径空间函数。一般形式为

$$\int D\vec{r}(t)\cdot F[\vec{r}(t)] \tag{2.28}$$

这里对全体可能路径的求和用 $D\vec{r}(t)$ 表示。

---

[16] 卢里，《粒子和场》，P.513

典型例子来自 *QM* 中时间演化问题。设初始波函数分布为 $\psi\left(\vec{r}_0 t_0\right)$，演化到 t 时刻，波函数分布为 $\psi\left(\vec{r}t\right)$。按照动力学演化总归是依照时序的“***Step by step***”的思想，将时间 t 分隔为 n 等分 $\varepsilon = t/n$，记相应空间变数为 $\vec{r}\left(m\varepsilon\right)=\vec{r}_m$。于是 $\vec{r}\left(t_0\right)=\vec{r}_0$，$\vec{r}\left(n\varepsilon\right)=\vec{r}_n=\left(\vec{r}t\right)$。在每个时刻都分别插入座标表象完备性条件 $\int\left|\vec{r}_i\right\rangle d\vec{r}_i\left\langle\vec{r}_i\right|=I$。于是，演化结果可以表示为如下连乘积的形式，

$$
\begin{aligned}
\psi\left(\vec{r}t\right) &= \int\left\langle\vec{r}t\right|T\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau H\left(\tau\right)\right)\left|\vec{r}_0\right\rangle d\vec{r}_0\psi\left(\vec{r}_0 t_0\right) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ n\to\infty}}\int\int\cdots\int\left\langle\vec{r}_n\right|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\left(t\right)\varepsilon\right)\left|\vec{r}_{n-1}\right\rangle d\vec{r}_{n-1}\left\langle\vec{r}_{n-1}\right|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\left(t-\varepsilon\right)\varepsilon\right)\left|\vec{r}_{n-2}\right\rangle d\vec{r}_{n-2}\left\langle\vec{r}_{n-2}\right|\cdot \\
&\quad \cdots\left|\vec{r}_1\right\rangle d\vec{r}_1\left\langle\vec{r}_1\right|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\left(\varepsilon\right)\varepsilon\right)\left|\vec{r}_0\right\rangle d\vec{r}_0\psi\left(\vec{r}_0 t_0\right)
\end{aligned}
$$

由于 $H=\dfrac{\vec{P}^2}{2m}+V\left(\vec{r}\right)$，每重积分下被积函数矩阵元可以计算出来，得[17]

$$
\left\langle\vec{r}_m\right|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\left(m\varepsilon\right)\varepsilon\right)\left|\vec{r}_{m-1}\right\rangle=\frac{1}{A^3}\exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{\vec{r}_{m+1}-\vec{r}_m}{2},\frac{\vec{r}_{m+1}-\vec{r}_m}{\Delta t},\frac{t_{m+1}+t_m}{2}\right)\right\}
$$

这里 $\dfrac{1}{A}=\sqrt{\dfrac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}}$。于是总计成为

$$
\boxed{\psi(\vec{r}t)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ n\to\infty}}\int\ldots\int\frac{d\vec{r}_{n-1}}{A^3}\cdots\frac{d\vec{r}_1}{A^3}\frac{d\vec{r}_0}{A^3}\psi(\vec{r}_0 t_0)\exp\left\{\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{i=0}^{n-1}L\left(\frac{\vec{r}_{i+1}+\vec{r}_i}{2},\frac{\vec{r}_{i+1}-\vec{r}_i}{\varepsilon},\frac{t_{i+1}+t_i}{2}\right)\right\}}
$$

（**2.29a**）

实际上，在极限下，这个无穷重积分下的被积指数是空间路径的泛函数。它将整条空间路径函数 $\left(\vec{r}_0 t_0\to\vec{r}_1 t_1\to\vec{r}_2 t_2\to\cdots\right)\Rightarrow\left(\vec{r}t\right)$ 当作自变量，每给定一条空间路径函数，被积的指数泛函就有一个复数值，再依照作为积分自变数的全体可能空间路径函数求和。所以，积分实质上是

[17] 张永德，《高等量子力学（第 **2** 版，下册）》，北京: 科学出版社，**2010** 年。第 **7.1** 节。

个泛函积分。也可以将各重积分求和全部乘开来，立即知道，积分求和的每一项都对应一条空间路径，最终结果是对全部可能空间路径求和。由于求和对象的自变数是空间路径函数，通常将这种空间路径相关的特殊泛函积分称作路径积分。利用传播子U和作用量S，可记为

$$\boxed{\begin{cases} \psi(\vec{r}t) = \int d\vec{r}_0 \cdot U\left(\vec{r}t\,;\vec{r}_0 t_0\right)\psi(\vec{r}_0 t_0) \\ U\left(\vec{r}t\,;\vec{r}_0 t_0\right) = \int D\vec{r}\left(t\right)\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\right\} \\ S\left[\vec{r}\left(t\right)\right] = \int dt L\left[\vec{r}\left(t\right),\vec{p}\left(t\right),t\right] \end{cases}} \tag{2.29b}$$

这里$(\vec{r}t)$和$(\vec{r}_0 t_0)$是时间空间的两个参考点，$\vec{r}(t)$为连结这两个头尾时空点的一切可能路径（包括极端陡峭的所有各类折线！）。

2，泛函积分定义

一般说，这时无穷重积分的自变数是某一类时空函数——（作为时空函数的）场量，而被积函数则是这类时空函数的某种泛函数。一般写为

$$\int D\varphi(\vec{r}t)\cdot F\left[\varphi(\vec{r}t)\right] \tag{2.30}$$

这里用$D\varphi(\vec{r}t)$表示对所有可能场量时空函数求和。当然，定义可以推广到多个场量情况，成为多重泛函积分。对于多数相互作用，被积泛函指数可能为（积分测度尚未知晓的，严格说相应的泛函积分尚未有定义的）非二次型形式。但泛函积分经常采用相对比值形式，伴有同类型泛函积分作为分母，以期消去因式化的不确定因子或发散因子。

具体事例是量子场论中 ***Green*** 函数生成泛函。例如，***QED*** 中的旋量量子电动力学，其 ***Green*** 函数生成泛函就是

$$\boxed{\begin{cases} Z[\eta]=\dfrac{1}{N}\int D\psi D\bar{\psi}\prod_{\mu} DA_{\mu}\cdot \mathrm{xp}\left\{i\int d^4x\mathcal{L}_{eff}\right\}\exp\left\{i\int d^4x\left(\bar{\psi}\eta+\psi\bar{\eta}+J_{\mu}A_{\mu}\right)\right\} \\ \mathcal{L}_{eff}=-\bar{\psi}(\gamma\cdot\partial+m)\psi-\dfrac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2+ie\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A_{\mu}-\dfrac{1}{2\varsigma}\left(\partial_{\mu}A_{\mu}\right)^2 \quad , \quad N=Z[0] \end{cases}} \quad (2.31)$$

其中，任意函数$\eta(x),\bar{\eta}(x),J_{\mu}(x)$均是外源。这个泛函积分的自变量是（作为时空函数的）场量$\psi(x),\bar{\psi}(x),A_{\mu}(x)$。被积泛函指数中$-\frac{1}{2\varsigma}\left(\partial_{\mu}A_{\mu}\right)^2$项物理上来自规范约束条件$\partial_{\mu}A_{\mu}=0$，数学上来自该规范条件的 ***Fresnel*** 型泛函δ函数表示（见下讲）。被积泛函指数是个二次型形式。这个泛函积分是可积的。

有关泛函积分的进一步众多性质见下讲。