

[第 3 讲]

Berry 相位争论分析

——可积与不可积？动力学与几何？

I, 前言

II, 关于 *Berry* 相位的争论

- 1, *Berry* 之前的看法——*Schiff* 为代表
- 2, *Berry, Simon* 的推导论证
- 3, 不同看法 (I) ——*Berry* 相位是动力学相因子?
- 4, 不同看法 (II) ——*Berry* 相位只能从含时 *Schrodinger* 方程导出?
- 5, 不同看法 (III) ——能量本征态叠加有 *Berry* 相位?

III, “*Berry* 相位本质”争论的澄清

- 1, 一个反例：一维准定态的矢量平移总是拓扑平庸的
- 2, 正确的说法：一盆有小孩的洗澡水
- 3, 不必从含时 *Schrodinger* 方程导出 *Berry* 相位
- 4, “不同能级本征态叠加中的 *Berry* 相位”问题分析

IV, *Berry* 相位几何本质的再澄清

- 1, 二维流形上矢量平移及协变导数计算
- 2, 二维球面和乐 (*Holonomy*) 相因子计算
- 3, 流形上的协变计算

V, 小结

※

※

※

I, 前言

1984 年 *Berry* 提醒人们注意在准稳态含时系统演化中存在一类拓扑相位。它源自系统含时 *Hamiltonian* 参数空间的非平凡拓扑性质。它们其实是弯曲空间中矢量平移的和乐 (*Holonomy*) 相位。

II, 关于 *Berry* 相位的争论

1, *Berry* 之前人们的看法——以 *Schiff* 为代表

设 *Hamiltonian* 通过含时参量 $\bar{R}(t)$ 依赖于时间, 即 $H(t) = H(\bar{R}(t))$, *Schrodinger* 方程为

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(\bar{R}(t)) |\psi(t)\rangle, \quad |\psi(t)\rangle|_{t=0} = |\varphi_n(\bar{R}(0))\rangle \quad (3.1)$$

假设此含时过程是个绝热演化过程, 即, 时刻都有准定态方程成立,

$$\begin{cases} H(\bar{R}(t)) |\varphi_n(\bar{R}(t))\rangle = E_n(\bar{R}(t)) |\varphi_n(\bar{R}(t))\rangle \\ \langle \varphi_n(\bar{R}(t)) | \varphi_{n'}(\bar{R}(t)) \rangle = \delta_{nn'} \end{cases} \quad (3.2)$$

注意, 虽然 *Hamiltonian* $H(\bar{R}(t))$ 变化足够缓慢(标准是不致引起相关量子数改变的状态跃迁), 但经历长时间演化, 其变化量可以很大。

按准定态方程, 可以合理地假设抽出 (“扣除”) 动力学相位

$e^{i\alpha_n(t)} = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{\tau=0}^t E_n(\bar{R}(\tau)) d\tau\right\}$ 。于是, 假设满足初条件的含时解为

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{\tau=0}^t E_n(\bar{R}(\tau)) d\tau\right\} \exp\{i\gamma_n(t)\} |\varphi_n(\bar{R}(t))\rangle \quad (3.3)$$

其中 $\gamma_n(t)$ 为待定相位, 由含时 *Schrodinger* 方程决定, 简单计算得:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} &= E_n(\bar{R}(t)) |\psi(t)\rangle - \hbar \frac{d\gamma_n(t)}{dt} |\psi(t)\rangle \\ &+ i\hbar \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{\tau=0}^t E_n(\bar{R}(\tau)) d\tau\right\} \exp\{i\gamma_n(t)\} \frac{\partial |\varphi_n(\bar{R}(t))\rangle}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= H(\bar{R}(t))|\psi(t)\rangle - \hbar \frac{d\gamma_n(t)}{dt} |\psi(t)\rangle \\
&\quad + i\hbar \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{\tau=0}^t E_n(\bar{R}(\tau)) d\tau\right\} \exp\{i\gamma_n(t)\} \frac{\partial |\varphi_n(\bar{R}(t))\rangle}{\partial t}
\end{aligned}$$

即

$$\dot{\gamma}_n(t) = i \langle \varphi_n(\bar{R}(t)) | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_n(\bar{R}(t)) \rangle = i \langle \varphi_n(\bar{R}(t)) | \nabla_{\bar{R}} \varphi_n(\bar{R}(t)) \rangle \cdot \dot{\bar{R}}(t)$$

对时间积分后，得到

$$\gamma_n(t) = i \int_{\tau=0}^{\tau=t} \langle \varphi_n(\bar{R}(\tau)) | \frac{\partial}{\partial \tau} | \varphi_n(\bar{R}(\tau)) \rangle d\tau = i \int_{\bar{R}(0)}^{\bar{R}(t)} \langle \varphi_n(\bar{R}) | \nabla_{\bar{R}} \varphi_n(\bar{R}) \rangle \cdot d\bar{R} \quad (3.4)$$

由 *Schiff*¹ 叙述可知，*Berry* 之前的人们是知道上面这段简单推导的。但他们认为：由于此过程每个时刻都有准定态方程 (2) 成立，因此，在 t 时刻瞬时定态解 $|\varphi_n(\bar{R}(t))\rangle$ 前面可以添加任意相位 $e^{i\delta(t)}$ 而不影响定态解成立。并且，对不同时刻这个相位可以选定不同的数值。这样一来事情就成为，整个含时过程可以有一个任意时间函数的相位，而不影响准定态方程成立。这就是说，**第一，在绝热近似——即时时刻刻都有准定态方程成立的假设下，从应当逻辑自洽考量，对这类过程不应当再计较任何含时相位。第二，*Berry* 之前人们并不知道这类过程里面会有个不可积相位问题。基于这两点，*Berry* 之前人们有意地忽略了上面这个 $\gamma_n(t)$ 表达式及其简单推导，对其“知而不谈”。**

2, *Berry, Simon* 的推导论证

***Berry* 显然知道这些背景，也认为公式 (4) 本身并无独立意义，**

¹ *L. I. Schiff*, 《量子力学》，人民教育出版社，1982 年。第 332-334 页。

所以在他原始论文²中，不仅没有列出公式(4)的推导过程，甚至干脆没有写出公式(4)。他只是在文中强调指出：在这类参量含时绝热演化过程中，提请注意存在一类不可积的、不能写成 $\bar{R}(t)$ 解析函数的含时相位。特别是，连续循环一周 C 之后， $\gamma_n(t)$ 是非单值的 $\gamma_n(T) \neq \gamma_n(0)$ 。这时将得到连续循环一周 C 后动力学方程解和 $\gamma_n(t)$ ：

$$\begin{cases} |\psi(T)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{\tau=0}^T E_n(R(\tau)) d\tau\right\} \exp\{i\gamma_n(C)\} |\psi(0)\rangle \\ \gamma_n(C) = i \oint_C \langle \varphi_n(\bar{R}) | \nabla_{\bar{R}} \varphi(R) \rangle \cdot d\bar{R} \end{cases} \quad (3.5)$$

这里，他强调的只是圈积分公式(5)，并直接写出了公式(5)。

根据Berry这一开创性工作，人们将系统循环一周 C 返回后，由参数空间拓扑不平庸所导致的不为零圈积分相位 $\gamma_n(C)$ 称作Berry相位。“Berry相位”名称首先由Berry朋友、数学家Simon当时在他所写文章³中提出。Simon论文对此相因子的数学背景有更深刻的剖析，指出：它们就是弯曲空间中矢量平移时的和乐(Holonomy)相位。后来Berry相位被推广到非准稳定、非闭合的情况。本文只限于讨论当时的闭合积分Berry相位。

有关Berry相位根源与性质的一些观点曾经引起过激烈的争论。本讲只限于正面考量有关争论的学术内容，不打算引征相关的文献。

3, 不同看法之一——Berry相位是动力学相位?

有一种做法：对上述含时体系设定如下含时展开，

² M.V. Berry, F.R.S., *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. Lond. A392, 45-57(1984);

³ B. Simon, *Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase*, PRL, 51(1983) 2167。由于Berry稿子被审稿人遗失而耽误，Simon文章发表反而在Berry文章之前。

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{i\gamma_n(t)} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt E_n(\bar{R}(t))} |\varphi_n(\bar{R}(t))\rangle$$

并继以绝热近似之后，经过前面简单计算给出 $\gamma_n(t)$ 的式 (4)。然后就将 (4) 式当作了 *Berry* 相位。接着进一步强调：上述推导显示，*Berry* 绝热相 γ_n 的出现，是由于要求量子态随时间的演化必须满足 *Schrodinger* 动力学方程。因此，从根本上讲，无论 $\alpha_n(t)$ 或者 $\gamma_n(t)$ ，其根源都来自动力学的要求。

这一观点，细分内容有三：其一，*Berry* 相位既然来源于动力学方程，所以本质上是动力学的；其二，*Berry* 相位来源于含时 *Schrodinger* 方程；其三，*Berry* 相位属于绝热过程，是绝热相。

应当说这是一些误会。产生误会的原因也许是：没有注意到 *Berry* 之前人们对这类过程中含时因子 $\gamma_n(t)$ 表达式及其推导有意“视而不见”的原因；再就是，没有注意 *Berry* 原文前面有一段关于不可积相位的叙述。

下面第 IV 节将更详细地分析 *Berry* 相位的根源与性质。

4, 不同看法之二——只能从含时 *Schrodinger* 方程导出 *Berry* 相位?

其实，*Berry* 相位——圈积分公式 (5) 也可以从特定的定态 *Schrodinger* 方程导出。比如，带 *AB* 效应的 *Young* 氏双缝实验⁴：在电子双缝实验的缝屏后面两缝之间放置一个细螺线管。通电后管内 $\bar{B} \neq 0$ ；但管外 $\bar{B} = 0$ ，矢势 $\bar{A} \neq 0$ 。这个细螺线管产生一细束磁力线束，称为磁弦。下面理论分析表明，相对于未通电的情况来说，通电后，

⁴ 张永德，《量子力学（第二版）》，北京：科学出版社，2010年。§9.4。

接受屏上干涉花样在包络(图中虚线所示轮廓线)曲线不变情况下, 所有极值位置都发生了移动; 若电流变化, 则峰值位置跟随变化; 电流反向, 峰值位置移动也反向。下面对此作一个简要分析。

由于电子 *Young* 氏双缝实验装置应当保证: **两缝 a_1, a_2 处入射电子波函数相干分解。所以在两缝处波函数相位差必为固定。** 不失一般性, 假设两处的相位相等, 于是通电之前的定态方程为

$$\begin{cases} \frac{\bar{p}^2}{2\mu} \varphi_0(\vec{r}) = E \varphi_0(\vec{r}) \\ \varphi_0(\vec{r}t) = \varphi_0(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} \end{cases} \quad (3.6a)$$

求解时考虑带有双缝的几何边界条件 (参见第一讲)。C 点合振幅为 $f_c^{(0)} = f_1^{(0)}(c) + f_2^{(0)}(c)$ 。通电之后, $\bar{p} \rightarrow \bar{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ 。有

$$\begin{cases} \frac{1}{2\mu} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r}) \\ \varphi(\vec{r}t) = \varphi(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar} \end{cases} \quad (3.6b)$$

直接验算即知, 此方程的解, 在上面解的基础上, 可以写作

$$\varphi(\vec{r}) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_a^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'\right) \varphi_0(\vec{r}) \quad (3.7)$$

结合下面(9)式叙述表明, **在 $\vec{B} \neq 0$ 区域此处相位积分不仅与两端点有关, 并且与路径有关, 而电子行进的路径又没有明确的轨道, 因而这个相位是“不可积的”! 只在 $\vec{B} = 0$ 的区域它与路径无关, 才是可积的(这也正说明, 磁场毕竟是一种物理实在, 不能通过数学变换将其彻底地转化为某种含义确定的相位)。** 这个相位存在表明, 即使粒子路径限制在电磁场场强为零的区域, 粒子不受定域力的作用, 但电磁势 (沿粒子路径的积分) 仍会影响粒子运动的相位。

于是, 在通电情况下, C 点的合振幅成为

$$\begin{aligned}
f_c &= \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{a,1}^c \vec{A} \cdot d\vec{l}\right) f_1^{(0)}(c) + \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{a,2}^c \vec{A} \cdot d\vec{l}\right) f_2^{(0)}(c) \\
&= \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{a,1}^c \vec{A} \cdot d\vec{l}\right) \left\{ f_1^{(0)}(c) + e^{\frac{ie}{\hbar c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}} f_2^{(0)}(c) \right\} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

这里，指数上线积分的脚标 1 和 2 分别表示积分沿路径 1 和 2 进行。大括号外相因子是新增加的“外部相位”，没有可观测的物理效应，可以略去；但大括号内 $f_2^{(0)}(c)$ 前的相位为新增加的**内部相位**，它改变了**两束电子在 C 点的相对相位差**，从而改变了**双缝干涉花样的极值位置**。这个内部相位可以改写作为

$$\exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}\right) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \iint (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}\right) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \Phi\right) \quad (3.9)$$

这里 Φ 是由路径 1 和 2 所包围面积内的磁通。由于这个相位并不改变单缝衍射的强度分布，所以在条纹移动时，诸条纹极值的包络曲线形状不变。这些结论已直接或间接地为众多实验所证实⁵。

上面磁 AB 效应应当扩充成为包括电 AB 效应在内的 *Lorentz* 变换协变的形式。这时，由于 $(A_\mu) = (\vec{A}, i\varphi)$ 和 $(x_\mu) = (\vec{x}, ict)$ ，相位的路径积分应当扩充成为

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \rightarrow \oint A_\mu dx_\mu = \oint (\vec{A} \cdot d\vec{x} - c\varphi dt)$$

于是，这个**不可积相位**——**Berry 相位**就成为如下形式

$$\exp\left\{\frac{ie}{\hbar c} \oint A_\mu dx_\mu\right\} \quad (3.10)$$

注意，由于 $A_\mu dx_\mu$ 在 *Lorentz* 变换下是个标量，总的电磁 AB 效应是***Lorentz* 变换不变的**，同时又是**规范变换不变的**。因为，对于任一可

⁵ 最初有 *R.G.Chamber, Phys. Rev.Lett., 5, 3(1960)*。

微函数 $f(\bar{x}, t)$ 引导出的规范变换

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$$

上面闭曲线积分相应为

$$\oint A'_\mu dx_\mu = \oint (A_\mu + \partial_\mu f) dx_\mu = \oint A_\mu dx_\mu$$

事实是，屏后空间的拓扑性质已经是非平庸的了：**由于存在磁弦，空间由曲面单联通转变为曲面多联通**（参考 III.3.iii 节）。关于场强和势谁更根本、整体和局域性质等更进一步讨论可见脚注 4 文献。

5, 不同看法之三——能量本征态叠加出 *Berry* 相位?

还有一种做法：将 *Berry* 相位问题推广到两个不同能级定态叠加的含时分析。对一些有限能级情况这是可以的，但最好不要普遍推广。比如，有如下做法，对一维谐振子 $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ ，取初态为叠加态 $|\psi(0)\rangle = \cos(\theta/2)|+\rangle + \sin(\theta/2)|-\rangle$ 。继而演化为含时叠加态，

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\theta/2)e^{-i\epsilon_+\Delta t/\hbar}|+\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\epsilon_-\Delta t/\hbar}|-\rangle \quad (3.11)$$

对它进行 *Berry* 相位的分析：当时间变化时，说 $|\psi(t)\rangle$ 也可以划出一个立体角，出来 *Berry* 相位等等（其实，现在是高频振荡，完全说不上是缓变的准定态过程）。例如，取演化的一个循环周期 $\tau = \pi\hbar/\Delta$ 之后， $|\psi(\tau)\rangle = -|\psi(0)\rangle$ 。可得总相位 π 。按 $\gamma(t)$ 公式 (4) 计算得

$$\gamma(\tau) - \gamma(0) = -\pi(1 - \cos\theta)$$

当 $\theta = 0, \pi$ 时 $\gamma(\tau) - \gamma(0) = 0$ ；当 $\theta = \pi/2$ 时 $\gamma(\tau) - \gamma(0) = \pi$ 。就这样，将这个相位称作了 *Berry* 相位。

一般而言，这又是一个误解。这种做法从表面形式上看并没有什么问题，但在物理和数学概念上都值得推敲。

首先，这个系统的 *Hamiltonian* 并不含时、没有随时间变化的参数空间、是拓扑平庸的，谈不上参数空间和乐相位计算。这种叠加是在 *Hilbert* 空间中进行的。此问题之所以是个时间相关问题，完全是由于初条件——初始处于叠加态。问题本身没有拓扑非平庸的数学背景，并不是所关注的准稳态时变问题。

退一步说，即便算出这个（属于 *Hilbert* 空间，不属于参数空间的）相因子不为零，或是在有些情况下（自旋在磁场中进动）能够观测，也只说明此时和乐相位有另一种来源——不同能级态叠加形成二维球面拓扑性质，并不来源于 *Hamiltonian* 参数空间的拓扑性质。

其次，更重要的是，除磁场中自旋进动等有限能级情况外，很难进行一般性的实验观测。比如，上面叠加态的内部相位就很难用实验来检测。现在看看用此态作任意力学量算符的平均，有

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \Omega | \psi(t) \rangle &= \cos^2(\theta/2) \langle + | \Omega | + \rangle + \sin^2(\theta/2) \langle - | \Omega | - \rangle \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left\{ \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) e^{-2i\Delta t/\hbar} \langle - | \Omega | + \rangle \right\} \end{aligned}$$

注意定态有时间相因子 $e^{-iEt/\hbar}$ ，不同能级间相位差为 $e^{-i(E_m - E_n)t/\hbar}$ 。由于 $\hbar = 6.582 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{sec}$ ，设 $\Delta \sim \text{eV}$ ，则 $\omega = \Delta/\hbar = 1.52 \times 10^{15} \text{ (1/sec)}$ 。**振荡频率非常高！正是由于这个相位差因子高频振荡，而测量持续时间经常需要经历很多个这样的振荡周期，于是干涉项的测量结果将会被抹平为零。**用数学思想来简明表示就是 $e^{i\beta(x-y)} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \delta_{x,y}$ ⁶。即便能级间距小到 $\sim 0.001 \text{ eV}$ ，再乘以十分短促的测量持续时间 $\sim \text{ns} = 10^{-9} \text{ sec}$ ，也很难观察到。**这一点在统计测量分析中很重要：它排除了不同能级概率幅间干涉，为量子系综平均计算的“无规相差假设”提供了实验基础，构成**

⁶ 见张永德《高等量子力学》，北京：科学出版社，2008年，第一章。或见本书第16讲。

量子统计力学基本假设之一。相反，如果能级差十分小，或是测量持续时间短促到 $10^{-16} \sim 10^{-15} \text{ s}$ ，这时情况发生变化，不但需要关于 *Berry* 相位的这类计算，而且不同能级无规相差假设将会失效⁷。

III, “*Berry* 相位本质”争论的澄清

1, 一个反例：**一维准定态矢量平移总是拓扑平庸的**

下面详细论证：**i**, 什么是 *Berry* 相位，**ii**, 它的本质是动力学的还是几何的。在此之前，先用一维例子说明上节“(4) 式 $\gamma(t)$ 是 *Berry* 相位”的说法为什么不正确。

对于一维准定态时空演化过程，由于其时间演化的拓扑平庸性质。这时可以指望，**(4) 式相位 $\gamma(t)$ 经历循环一周之后恒为零**。

证明：因为含时态是归一化的，有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_n(\bar{R}(t)) | \varphi_n(\bar{R}(t)) \rangle \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_n(\bar{R}(t)) | \right\} | \varphi_n(\bar{R}(t)) \rangle + \langle \varphi_n(\bar{R}(t)) | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_n(\bar{R}(t)) \rangle \end{aligned}$$

利用“一维定态波函数总可以取成实函数”这一事实，进一步有

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_n(\bar{R}(t)) | \right\} | \varphi_n(\bar{R}(t)) \rangle = \langle \varphi_n(\bar{R}(t)) | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_n(\bar{R}(t)) \rangle$$

于是有

$$\langle \varphi_n(\bar{R}(t)) | \frac{\partial}{\partial t} | \varphi_n(\bar{R}(t)) \rangle = 0$$

这导致 $\gamma_n(t)$ 的被积函数恒为零，即 $\gamma_n(t) = 0$ 。

证毕。

具体例子就是一维量子活塞——活动墙的准定态一维无限深方阱问题。这时，无论怎样绝热地移动两面墙——保持阱内粒子状态的

⁷ 见本书第 16 讲。

无量纲量子数不变的任意含时准稳态演化过程中,不仅在两面墙移动一周还原时 $\gamma(C)=0$,而且在过程中时时刻刻都有 $\gamma(t)=0$ 。

2, 正确的认识: (4) 式是一盆有小孩的洗澡水

前面已经说过,人们早就知道上面 $\gamma(t)$ 表达式(4)。只是“有意忽视”。*Berry*的功劳在于指出:此处洗澡水中有小孩,不应当全部倒掉。小孩的名字就是人们现在称作的*Berry*相位 $\gamma(C)$ 。

因此,一方面,既不可以像*Berry*以前的人们笼统地将 $\gamma(t)$ 当洗澡水全部倒掉;另一方面,参考*Berry*以前人们理由并结合上面反例可知,也不可以笼统地将 $\gamma(t)$ 当作小孩(*Berry*相位)全部捡了回来,而且还进一步对小孩作了新的定义,并探讨了小孩的来源——来自动力学,而不是来自参数空间非平庸的几何性质。

总之,由*Berry*原文,结合一维定态一般例子,正确认识是:

一般对准定态过程而言,这个 $\gamma(t)$ 的表达式通常是不应当计较的,何况它还存在等于零的平庸情况。所以不能将这个表达式笼统地称作为*Berry*相位。只当这个相因子是不可积的、循环一周后不为零的情况下,才是*Berry*相位。这时系统的内禀空间必定是拓扑不平庸的。

IV, *Berry*相位几何本质的再澄清

1, 二维流形上矢量平移及协变导数计算

先给出单位球面上活动标架的微分表示式。取球面上活动标架 $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ 。容易得到此活动标架在固定的直角坐标中的表示:

$$\begin{cases} \bar{e}_r = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\} \\ \bar{e}_\theta = \{\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta\} \\ \bar{e}_\varphi = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\} \end{cases} \quad (3.12)$$

可以证明⁸：一般说来，活动标架的导数构成一组封闭关系。比如，由(12)式就能得到，对球坐标活动标架的微分表示式为：

$$\begin{cases} d\bar{e}_r = \bar{e}_\theta d\theta + \bar{e}_\varphi \sin \theta d\varphi \\ d\bar{e}_\theta = -\bar{e}_r d\theta + \bar{e}_\varphi \cos \theta d\varphi \\ d\bar{e}_\varphi = -\bar{e}_r \sin \theta d\varphi - \bar{e}_\theta \cos \theta d\varphi \end{cases} \quad (3.13)$$

再引入广义平行移动概念。平面上两根不相交的直线称为平行线。但在球面上，这种平行线的概念是不存在的。因为球面所有的“直线”即大圆均相交。但可以引入对球面上矢量作平行移动的概念。令 $\bar{A} = A(\bar{e}_\theta \cos \gamma + \bar{e}_\varphi \sin \gamma) \equiv A\bar{e}$ 为球面某点 P_1 的切平面内一个矢量。并称它为“属于曲面 (P_1 点) 的矢量”。众所周知，三维欧氏空间中，矢量 \bar{A} 平行移动时， \bar{A} 对移动参数的全微分恒为零。**表现为沿此空间直线 (平直空间最短程线) 平移时， \bar{A} 在此直线随动坐标系中坐标不变，**

$$d\bar{A} = 0 \quad (3.14)$$

现在在球面上，设沿一小弧线段 P_1P_2 ，按普通意义的平行移动，将其平移到邻近的 P_2 点。由于 P_2 点切平面与 P_1 点切平面有不同的法线方向，矢量 \bar{A} 将不再处于 P_2 点的切平面内，也即不再属于曲面 (P_2 点) 的矢量。一般说，属于曲面的矢量，它的全微分为零和它沿曲面 (某条曲线) 平行移动的概念不再一致。所以需要扩充矢量平移的概念，使矢量移动时保持仍属于曲面 (在各点都处于该点切平面内)。

[定义 1] 对矢量的绝对微分 (或协变微分) 为，属于曲面某点的

⁸ 华罗庚，《高等数学引论》，第一卷，第二分册，科学出版社。第 139 页。

矢量 \bar{A} ，当它沿曲面移动时，其微分矢量向此点切平面的投影，称为此矢量在此点的绝对微分，即

$$D\bar{A} = d\bar{A} \text{ 在切平面上的投影矢量} \quad (3.15)$$

于是，将上面矢量平行移动是“全微分为零”的条件 (14)，替换为较弱的“绝对微分为零”的条件 (15)。就是说，矢量在曲面上平行移动时，矢量向曲面上沿移动曲线各点切平面内的投影一直保持不变。依照各点所在切平面内观察者的观察，仿佛此矢量一直没有变化。于是将三维平直欧氏空间中矢量平行移动概念发展为：

[定义 2] 曲面上矢量平移的定义是对参数“绝对微分为零”⁹：

$$D\bar{A} = 0 \quad (3.16)$$

此式当然也是三维超曲面上矢量沿曲面上某一曲线平移的定义。更一般地说，(16) 式是当黎曼空间 V_m 作为浸入 R_n 空间的曲面时，从包容空间 R_n 来看¹⁰，

“ V_m 上矢量 ξ 的平行移动要使 $d\xi$ 的切分量永远为零”，就是要使矢量的微分变化量 $d\xi$ 与 V_m 处处正交，即 “ $d\xi$ 总是垂直于 V_m 的切仿射空间 A_m ”。

这些概念可以结合球面来具体说明。设球面某点切平面内矢量为

$$\bar{A} = A(\bar{e}_\theta \cos \gamma + \bar{e}_\varphi \sin \gamma) \equiv A\bar{e}$$

它在移动时，变化的微分量为

$$d\bar{A} = (\bar{e}_\theta \cos \gamma + \bar{e}_\varphi \sin \gamma)dA + A\{-\bar{e}_\theta \sin \gamma d\gamma + \cos \gamma d\bar{e}_\theta + \bar{e}_\varphi \cos \gamma d\gamma + \sin \gamma d\bar{e}_\varphi\}$$

⁹ A.П.НОРДЕН,《微分几何学》，商务印书馆，陈庆益译，1957年；C.V.威斯顿霍尔兹，《数学物理中的微分形式》，北京大学出版社，叶以同译，1990年；П.К.РАШЕВСКИЙ,《黎曼几何与张量解析》，高等教育出版社。俞玉森译，1956年。下册，第116页。

¹⁰ C.V.威斯顿霍尔兹，《数学物理中的微分形式》，北京大学出版社，叶以同译，1990年。

将活动标架的微分表示 (13) 式代入此处, 得

$$\begin{aligned} d\bar{A} &= (\bar{e}_\theta \cos \gamma + \bar{e}_\varphi \sin \gamma) dA + A \{ (d\gamma + \cos \theta d\varphi) \cdot (-\bar{e}_\theta \sin \gamma + \bar{e}_\varphi \cos \gamma) + \\ &\quad + (-\cos \gamma d\theta - \sin \gamma \sin \theta d\varphi) \bar{e}_r \} \\ &= (\bar{e}_\theta \cos \gamma + \bar{e}_\varphi \sin \gamma) dA + A \{ (d\gamma + \cos \theta d\varphi) \cdot \bar{e}_r \times \bar{e} + \lambda \bar{e}_r \} \end{aligned}$$

这里 $\lambda = -(\cos \gamma d\theta + \sin \gamma \sin \theta d\varphi)$ 。显然, 矢量 $\bar{e}_r \times \bar{e}$ 与 \bar{e}_r 垂直, 所以处在此点切平面内, 并且在切平面内与 \bar{e} 相垂直的方向。

在球面上移动矢量 \bar{A} 不存在模长改变的问题, 即 $dA = 0$ 。得

$$d\bar{A} = A \{ (d\gamma + \cos \theta d\varphi) \bar{e}_r \times \bar{e} + \lambda \bar{e}_r \} \quad (3.17)$$

于是, 矢量 \bar{A} 沿球面任意曲线进行绝对微分的表达式为:

$$D\bar{e} = (d\gamma + \cos \theta d\varphi) \bar{e}_r \times \bar{e} \quad (3.18)$$

(18) 式是对 \bar{A} 的方向矢量 \bar{e} 的绝对 (协变) 微分。此时尚未涉及 \bar{A} 沿球面某条曲线的平移。

由此可知以下两点: **其一, 当矢量沿球面任一曲线平移, 即 $D\bar{A} = 0$ 时, 矢量的全微分变化量为**

$$d\bar{A} = A\lambda \bar{e}_r \quad (3.19)$$

于是, 由三维欧氏空间来看, **矢量的全微分变化量中不存在绕法线 \bar{e}_r 方向转动的成份。因为, 此时微分变化量总是沿此点球面的法线 \bar{e}_r 方向。微分变化量中不存在垂直于法线 (在切平面内) 的成份, 当然也就不存在绕法线方向转动的成份 (如有绕法线转动这种改变, 此改变量必处于切平面内)。显然反过来也可以说, 矢量的微分变化量中不存在绕法线 \bar{e}_r 方向转动 (也即当 \bar{e} 因移动而变化时, $\bar{e} - \bar{e}_0$ 面不绕 \bar{e}_r 轴转动), 也可以作为对矢量沿球面上任一曲线作平移的充要条件。这**

正是上页由包容空间 R_3 所看到的在球面 V_2 上的平行移动¹¹。

其二，矢量如果沿球面大圆作平移，它在切平面内活动标架 $\bar{e}_\theta - \bar{e}_\varphi$ 中的坐标将保持不变。这正是欧氏空间中矢量沿直线作平行移动时坐标保持不变的推广。比如，若矢量 $\bar{A} = A\bar{e} = A(\bar{e}_\theta \cos\gamma + \bar{e}_\varphi \sin\gamma)$ 沿球面上某条曲线作平行移动，

$$0 = D\bar{A} = A(d\gamma + \cos\theta d\varphi)\bar{e}_r \times \bar{e}$$

这导致

$$d\gamma + \cos\theta d\varphi = 0 \quad (3.20)$$

由于现在是沿经线移动，有 $d\varphi = 0$ 。所以 $\gamma = \text{const.}$ 。按 γ 定义，它是移动矢量 \bar{A} 与 \bar{e}_θ 之间的夹角，说明此矢量沿球面的经线大圆平行移动时，它在活动标架的 $\bar{e}_\theta - \bar{e}_\varphi$ 中的坐标一直保持不变。类似地，若矢量 \bar{A} 沿球面的赤道线作平行移动，由于 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ， $d\gamma = 0$ ，即 $\gamma = \text{const.}$ 。表明此矢量在赤道线活动标架 $\bar{e}_\theta - \bar{e}_\varphi$ 中坐标保持不变。

沿倾斜大圆的情况，可将球坐标的极点变换到这个大圆上，即为刚才所说沿经线平移的情况。所以第二条可以推广为：**矢量沿任意曲面最短程线作平移时，该矢量在沿线各个切平面的活动标架中坐标保持不变。**其实，这正是欧氏空间中“矢量沿直线平移坐标保持不变”结论向流形上矢量平行移动的推广。(20)式是球面上矢量平移的基本方程。

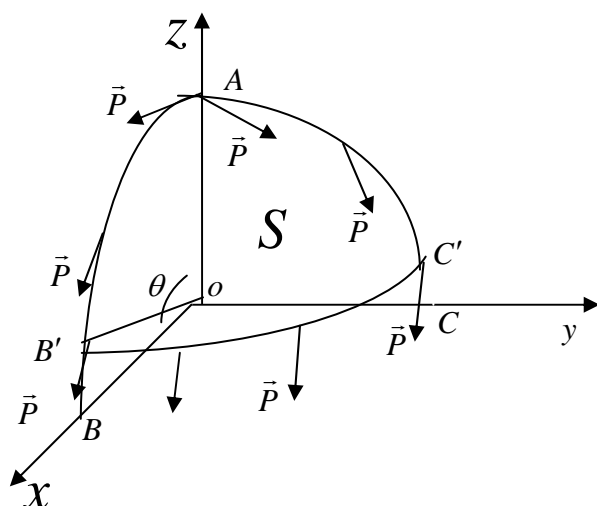
(20)式表示的矢量平移时分量的变化，也可以采用通常办法，用联络系数表达式来得到。详见下面 3, ii)。

¹¹ C.V.威斯顿霍尔兹，《数学物理中的微分形式》，北京大学出版社，叶以同译，1990年。

2, 二维球面和乐 (Holonomy) 相位计算

下面在球面上以初等方式实现和乐计算。

考虑第一象限由两条大圆弧 $AB', C'A$, 再加上一段纬度 θ 的 $B'C'$ 弧段(注意一般不沿赤道 BC 弧段)围成的部分球面。设球面 z 轴 A 点有一矢量 \vec{P} , 它切 A 点处 $X-Z$ 面内大圆弧, 即初始时 $\gamma=0$ 。由 A 点出发, \vec{P} 沿 $X-Z$ 面大圆弧平行移动, 直至 B' 点。由于此段 AB' 大圆弧是球面最短程线, 平行移动时 \vec{P} 继续保持与此段圆弧相切。在 B' 点经 $B'C'$ 弧段平移直到 C' 点。自 C' 点它又成为 YZ 面经线的切线保持如此直到返回 A 点。与出发时相比, 平移转一圈后 \vec{P} 转过了 $\Omega(S)$ 角度。



由于 $B'C'$ 弧段并不是球面最短程线, 矢量沿它平移时, 在切平面活动标架中坐标发生变化。 \vec{P} 沿大圆弧自 A 点平移到 B' 点, 所以 \vec{P} 与 B' 点局部标架 \vec{e}_θ 的夹角 γ 仍为零 $\gamma(\theta, \varphi)|_{\varphi=0} = 0$, 接着 \vec{P} 再沿不是大圆弧的 $B'C'$ 弧段平移到 C' 点, 此段中 γ 会增加

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} d\gamma = -\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \cos\theta d\varphi = -\frac{\pi}{2} \cos\theta \quad (3.21)$$

说明在 C' 点处矢量 \vec{P} 与 \vec{e}_θ 的夹角成为

$$\gamma_{C'} = -\frac{\pi}{2} \cos \theta \quad (3.22)$$

接着沿 $C'A$ 弧段平行移动并返回 A 点的途中, γ 角不再变化。但弧段 $C'A$ 本身在 A 点与弧段 AB' 有一夹角 $\frac{\pi}{2}$ 。所以 \bar{P} 平移一圈后总共转过角度为

$$\Delta\gamma = \frac{\pi}{2}(1 - \cos \theta) \quad (3.23)$$

可证, 这个转角恰等于 $AB'C'A$ 圈内部份球面积 S 对球心所张立体角:

$$\Delta\gamma(C) = \frac{\pi}{2}(1 - \cos \theta) = \Omega(S) \quad (3.24)$$

这是因为

$$\Omega(S) = \frac{S}{R^2} = \int_0^\theta \sin \theta d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}(1 - \cos \theta)$$

下面证明, 结论 (24) 是普遍的, 与球面上闭曲线形状无关。

[定理] 向量沿球面上任意闭曲线平行移动一圈后, 向量转过的角度等于闭曲线所围面积对球心所张的立体角, 转角对应的相因子称为和乐相位。全体和乐相位集合构成球面上 $U(1)$ 和乐群。

证明: 证明分为两部份¹²。

第一部分, 以大圆弧段为边界的球面 n 边多角形的面积为:

$$S = \left(2\pi - \sum_{i=1}^n \varphi_i \right) R^2 \quad (3.25)$$

注意两个大圆必相交于球面上相对的两个点(可称为这两个大圆的南北两极), 于是整个球面积被分为:

i, 这个多边形面积;

¹² A.П.НОРДЕН, 《微分几何学》, 商务印书馆, 陈庆益译, 1957年。

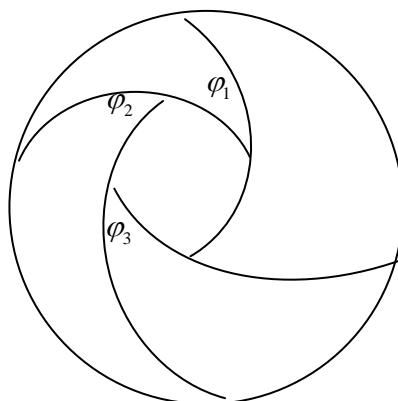
ii, 与此多边形关于球心

对称的另一多边形面积;

iii, n 个二三角形的面积, 它们的内角 φ_i 等于原多边形的外角。于是有:

$$2S + \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i}{2\pi} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^2$$

这就得到上述 S 的公式。



第二部分是求证 $\Delta\gamma(C) = \Omega(S_C)$: 依正向, 即逆时针方向沿此多角形平行移动矢量 \vec{P} 。设初始时刻 \vec{P} 位于顶点 A_1 , 属于球面并沿大圆弧 $A_n A_1$ 方向。在沿 $A_1 A_2$ 平行移动中, 因弧段 $A_1 A_2$ 是大圆, 移动中 \vec{P} 与 $A_1 A_2$ 的夹角保持不变。按逆时针转动

计算角度, 即从 $A_1 A_2$ 转到矢量 \vec{P} 计算转动角度, 于是在顶点 A_1 转过的角度为

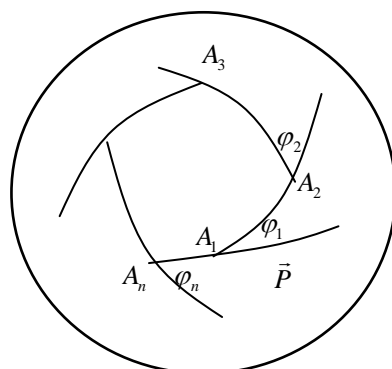
$$2\pi - \varphi_1$$

其中 φ_1 为多角形在顶点 A_1 的外角。移

动至点 A_2 后, \vec{P} 与边 $A_2 A_3$ 的夹角为 $2\pi - \varphi_1 - \varphi_2$ 。此值一直保持到点 A_3 。类似讨论下去, 最后可以确定当 \vec{P} 移至点 A_n , 将与 $A_n A_1$ 构成夹角¹³

$$2\pi - \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

这个角即为矢量 \vec{P} 回转多角形一圈之后的转角 $\Delta\gamma$ 。结合 (25) 式, 即知有



¹³ 对于平面, 多角形内角和为 $(n-2)\pi$, 外角和为 2π , 于是得: $2\pi - \sum_{i=1}^n \varphi_i = 0$ 。

$$\Delta\gamma = \frac{S}{R^2} = \Omega(S) \quad (3.26)$$

显然，球面任何闭曲线均可以由这种大圆线段多角形近似到任意程度，所以公式(26)对矢量沿球面任何闭曲线平行移动均成立。证毕。

以上结果也可直接计算得到¹⁴。

3, 流形上的协变计算

i, 流形的概念是欧氏空间的推广。粗略地说，流形就是“流动变化着的形状”，它在每一点的近旁和欧氏空间的一个开集是同胚的。因此在每一点的近旁可以引进局部坐标系。流形正是一块块“欧氏空间”粘起来的结果。做法的理论根据是[H. Whitney 定理]¹⁵：“任意一个 m 维光滑流形总能嵌入到 $2m+1$ 维欧氏空间中作为子流形。”

这说明尽管流形的概念较为抽象，其实它正是欧氏空间的推广。并最终仍可作为欧氏空间的嵌入子流形来实现。也就是说，可以取较高维数的欧氏空间作为它的包容空间。这给人们一个几何直观的方法来认识黎曼空间（引入了度量张量的可微流形）。特例是，三维欧氏空间内的曲面论就是这样一类例子。曲面可以看作二维黎曼空间。准确些说是，任一个二维黎曼空间可以局部地实现为三维欧氏空间中的某一曲面。这样所产生的几何称为曲面的内蕴几何。这种几何在曲面扭曲贴合（没有伸缩的扭曲变形重合）中是不变的¹⁶。上面对球面的讨论，正是给定了联络系数分布的二维黎曼空间的一种表现。公式(13、

¹⁴ 见张永德，《高等量子力学（第 II 版）》，北京：科学出版社，2010 年。[附录 G]。

¹⁵ 陈省身，陈维恒，《微分几何讲义》，北京大学出版社，1983 年。第 25 页，第 314-320 页。

¹⁶ A. П. НОРДЕН,《微分几何学》，商务印书馆，陈庆益译，1957 年；C. V. 威斯顿霍尔兹，《数学物理中的微分形式》，北京大学出版社，叶以同译，1990 年；П. К. РАШЕВСКИЙ,《黎曼几何与张量解析》，高等教育出版社，俞玉森译，1956 年。下册，第 116 页。

20) 便包含了球面的这些联络系数。

在 n 维流形 M 的任一点 $m(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 近旁所引入的同胚欧氏空间, 可利用其局部坐标系 (x^1, x^2, \dots, x^n) 作出 M 在其点 m 附近的切矢量, 用以构造局部标架。就是说, 在 M 的点 m 作出一个仿射空间 A_n 。 A_n 与流形 M 有一个共同点 m , 这样的空间 A_n 称为切仿射空间, 此空间中的矢量 ξ 称为流形 M 在 m 点的切矢量, 简称为 m 点的矢量 $\xi(m)$ 。这说明为何前面使用的是在球面各点切空间中的绝对 (协变) 微分。

纤维丛是流形向乘积的推广。常用的是矢量丛。简单地说, 设 E, M 是两个光滑流形, 映射 $\pi: E \rightarrow M$ 是光滑的, M 上各点的切仿射空间 $A_n(M)$ 由 n 维矢量集合构成。称 (E, M, π) 为流形 M 上的矢量丛。 E 为全空间, M 称为底空间, π 称为丛投影, A_n 称作纤维。直观地说, 矢量丛 E 是积流形和纤维 A_n 粘合的结果。粘合时要求纤维上的线性关系保持不变。 A_n 中的 n 维矢量 $\xi(m)$ 称为波截面。球面的内蕴几何可以看作是嵌入 3 维欧氏空间中的二维黎曼流形。用纤维丛的语言, 此球面称为底空间, 球面每点的切平面便是纤维, 逆映射 π^{-1} (即球面每点向切平面中矢量的一种对应, 也即, 定义在球面上的两分量的矢量场 $\bar{\xi}(m)$) 便是波截面。平移矢量坐标微分变化的展开系数便是联络。

ii, 球面度规与联络系数, 矢量平移计算。下面换个角度继续按微分几何常见方法进行相关计算, 以便更清楚地阐述争议问题。

在曲线坐标 (θ, φ) 中, 单位球面一小线段的长度为

$$dl^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.27)$$

于是，球面上切平面二维仿射空间中，协变及抗变度规分别为
($\mu, \nu = 1, 2$)

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}; \quad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

注意这里度规是对参数(θ, φ)直接写出的。 $dx^1 = d\theta$, $dx^2 = d\varphi$ 则是单位球面的两个抗变线段元，它们的协变线段元为

$$\begin{cases} dx_1 = g_{11} dx^1 + g_{12} dx^2 = g_{11} dx^1 = d\theta \\ dx_2 = g_{21} dx^1 + g_{22} dx^2 = g_{22} dx^2 = \sin^2 \theta d\varphi \end{cases} \quad (3.29)$$

按照联络系数和度规间的关系¹⁷：

$$\begin{cases} \Gamma_{l,mk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} \right) \\ \Gamma^k_{ij} = g^{kl} \Gamma_{l,ij} \end{cases} \quad (3.30)$$

由此可得球面的联络系数：

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g^{21} \Gamma_{1,21} + g^{22} \Gamma_{2,21} = g^{22} \Gamma_{2,21} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \Gamma^1_{22} = g^{11} \Gamma_{1,22} = -\cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (3.31)$$

其余联络系数为零。利用这些联络系数和度规，就可以用一种正规普适的方法将前面平移矢量的分量变化再次写出来。这时所用公式是矢量平移中分量变化的下述表达式：

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ji} \xi^i dx^j \quad (3.32)$$

矢量 ξ 的两个抗变分量分别为 $\xi^1 = \cos \gamma$, $\xi^2 = \frac{\sin \gamma}{\sin \theta}$ 。这里 ξ^2 的表达式是

由于要求矢量 ξ 归一化，即 $g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = 1$ ，也即 $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \sin^2 \theta = 1$ 。

¹⁷ П.К.РАШЕВСКИЙ, 《黎曼几何与张量解析》，高等教育出版社。1956年。

代入 (32) 式, 有

$$\left\{ \begin{array}{l} d \cos \gamma = d \xi^1 = -\Gamma^1_{22} \xi^2 dx^2 = \sin \theta \cos \theta \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} d\varphi = \cos \theta \sin \gamma d\varphi \\ d \frac{\sin \gamma}{\sin \theta} = d \xi^2 = -\Gamma^2_{12} \xi^2 dx^1 - \Gamma^2_{21} \xi^1 dx^2 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \theta} d\theta + \cos \gamma d\varphi \right) \end{array} \right. \quad (3.33)$$

显然, (33) 式中第一式即为前面的 (20) 式。第二式不独立, 实际上也是第一式。这只要将第二式左边微分出来, 对 θ 的微分项将消去右边的第一项, 也得到 $d\gamma = -\cos \theta d\varphi$ 。证毕。

iii, 例如, 带 AB 效应的杨氏双缝实验中 (在缝屏后面放置一根细磁弦), 缝屏后面的波函数便带着一个不可积的相位 (当积分路径扫过或穿过磁场强度不为零的区域时, 是与积分路径有关的, 而不仅只和积分的上下限有关; 只在磁场强度为零的区域, 积分与路径无关, 仅与积分上下限有关):

$$\exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \int_a^{\bar{x}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right) \quad (3.34)$$

这就是电磁现象中不可积相位。注意, 在此空间中的波函数将不是简单的复值函数, 而是数学家称作的截面, 物理学家称作的波截面 (见脚注 18 文献)。它不仅带有这个不可积的相位, 还带有如下不定幂次的相位 (数学家称为转换函数、转换因子、转换条件——现在它们仅仅构成最简单的 $U(1)$ 群):

$$\exp \left\{ n \frac{ie}{\hbar c} \Phi \right\} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.35)$$

被称作 *Berry* 相位的这些相因子不可以丢弃 (不像通常的外部——整体相位)。因为它们都有实验观测效应。因此, 这时缝屏后面空间波函数并不是通常意义下的波函数, 而是多分枝的波截面。之所以这样

是由于屏后空间的拓扑非平庸性质：由于磁弦的存在，空间区域已由曲面单联通转变为曲面多联通。

杨振宁先生在讲磁单极子问题时说¹⁸：“不同的波截面（比如说，属于不同的能量）显然满足同样的转换条件，因为有同样的 eg ”¹⁹。这里他是在强调，这个相位与粒子所处的动力学状态没有关系，而只取决于作为参数的磁单极子强度 g （或磁通 Φ ）。正是量 $g(\Phi)$ 凸现着球面拓扑性质，产生曲面单连通到曲面多连通的拓扑性质改变。从别种情况 *Berry* 相位计算来看，结果相似：*Berry* 相位表达式不依赖于粒子所处的动力学状态。更一般地说，它不直接依赖于系统的动力学性质，而只依赖于系统 *Hamiltonian* 中所含参数空间的几何性质。

V, 小结

概括起来，在 *Berry* 相位问题上，有一些应当消除的误解：

1, $\gamma_n(t)$ 不是常说的 *Berry* 相位。在 *Berry* 之前，人们早已知道 $\gamma_n(t)$ 的导出过程。不过，当时人们基于两点理由而“故意忽略”了它。*Berry* 显然知道问题的背景，所以在他原文里并不重视 $\gamma_n(t)$ 的推导，甚至连 $\gamma_n(t)$ 本身都没写出来。*Berry* 强调的只是圈积分 $\gamma_n(C)$ 。当系统经历一个周期还原时，倘若圈积分仍不为零的 $\gamma_n(C)$ 才是人们通常说的 *Berry* 相位。*Berry* 贡献在于：在大量人们以为没有意义而被忽略的 $\gamma_n(t)$ 堆里，指出蕴藏有物理的东西——它就是可以观测的、现在称作 *Berry* 相位的 $\gamma(C)$ 。现在，既不可以像 *Berry* 以前人们那样

¹⁸ 杨振宁，《杨振宁演讲集》，南开大学出版社，1989年。第307-321、323-326、347-354、390-391、406-409、525-526页。

¹⁹ 同上：第311页。

笼统地将所有 $\gamma_n(t)$ 都当洗澡水倒掉，也不可以笼统地将 $\gamma_n(t)$ 都当小孩全部捡回来。具体由 *Hamiltonian* 参数空间的拓扑性质决定。

2, 不要因为 $\gamma_n(C)$ 看似来源于含时 *Schrodinger* 方程，就主张 *Berry* 相位“根源于动力学”或“来自动力学的要求”，说它本质上是动力学的。在最初文章中，*Berry* 就是以“满足 *Schrodinger* 方程”为条件导出 $\gamma_n(C)$ 表达式的。可是 *Berry* 仍然强调这个相因子 $\gamma_n(C)$ 的性质是几何的，并没有强调它“根源于动力学”。更不必说数学家 *Simon* 文章对这个相因子的分析。它的确时常通过 *Hamiltonian* 出现在动力学演化过程中。但实际上，*Berry* 相位的物理根源并不直接就是 *Hamiltonian* 本身，不由 *Hamiltonian* 决定²⁰，与 *Hamiltonian* 中相互作用势没有内在因果关系。*Berry* 相位正是说明了：来自 *Schrodinger* 方程的东西不一定是动力学的，虽然动力学的东西一定来自 *Schrodinger* 方程。

3, *Berry* 相位表达式并非“只能”从“满足含时 *Schrodinger* 方程定出”。事实上，对某些过程由定态方程导出 *Berry* 相位更直接简便。由于这时已经是定态和不可积相位的圈积分，不必采用绝热定理就能分离出 *Berry* 相位。也就是说，虽然 *Berry* 最初提出 *Berry* 相位采用了绝热近似，但 *Berry* 相位并非只存在于绝热过程中。何况有不少工作将其推广到非绝热和非闭合情况。

4, 不宜将 *Berry* 相位随便推广到拓扑平庸且不含时 *Hamiltonian* 系统的不同能量本征态的叠加上，以至于将此叠加态的

²⁰ 文小刚，《量子多体理论》，高等教育出版社，2004年，第34页。

时间相因子的相位差看作 *Berry* 相位。其实，按照量子统计的“不同能级非相干叠加假设”，这种相位差被认为是随机的、不可观测的（参见本书第 16 讲）。

5, 基于 *Berry* 相位的拓扑性质, *Berry* 相位的存在并不局限于电磁相互作用, 甚至也不局限于量子力学。尽管 *Berry* 最初提出 *Berry* 相位只涉及量子力学和电磁相互作用。

总之, 就原来意义上的 *Berry* 相位来说, 只要系统 *Hamiltonian* 参数空间拓扑非平庸, 在系统某些 (含时甚至定态) 演化过程中就会出现 *Berry* 相位。鉴于它具有深刻的几何学含义, 对它本质的普遍提法是几何的或拓扑的。其实, 几何的或拓扑的提法不仅在 *Berry* 相位性质描述上更准确, 而且也更深刻和普遍: 它甚至和基本相互作用的种类无关。惟其如此, *Berry* 相位具有很强的抵抗动力学干扰的性能。这让它在量子通信和量子计算中受到广泛地重视。